statistische studiën

nummer 35

1975

STERFTETAFELS 1968-1972

NATIONAAL INSTITUUT VOOR DE STATISTIEK

MINISTERIE VAN ECONOMISCHE ZAKEN

KONINKRIJK BELGIË

D/1975/0496/2

KONINKRIJK BELGIË
MINISTERIE VAN
ECONOMISCHE ZAKEN

NATIONAAL INSTITUUT VOOR DE STATISTIEK

STATISTISCHE STUDIËN

NUMMER 35 1975

VERKRIJGBAAR BIJ HET
NATIONAAL INSTITUUT VOOR DE STATISTIEK
LEUVENSEWEG 44, BRUSSEL,
TEGEN STORTING VAN 65 F PER NUMMER
OP REKENING NR. 000-0082826-85

VOORWOORD.

De publicatie van nieuwe sterftetafels is steeds belangrijk zowel voor demografische toepassingen als voor deze op het economisch en sociaal vlak.

De volkstelling van december 1970 heeft het ons toegelaten sterftetafels op te stellen voor het Rijk voor de periode 1968-1972. De tafels worden in deze brochure weergegeven. De studie is tweedelig. In een eerste deel wordt de evolutie van de sterftekans in België beschreven voor de periode 1959-1972. Het tweede deel geeft ons de nieuwe afgeronde bruto-tafels, bestemd voor actuarieel gebruik.

De voorhanden zijnde publicatie benadrukt de geringe variatie van de mortaliteit in België alsook de struktuurverandering van de sterftekans bij de mannen. Deze elementen vormen een belangrijke bijdrage tot de kennis van de mortaliteit in ons land.

Bovendien vinden we in de studie afrondingen bestemd voor actuarieel gebruik. Twee afrondingen van de sterftetafel der mannelijke bevolking en een van de tafel der volledige bevolking worden erin gegeven. Deze verschillende afrondingen maken een belangrijk werkinstrument uit voor de actuaris.

*

De opvatting en de realisatie van dit werk danken we aan dhr Yves BALLEGEER. Voor de bruto-tafels kon hij beroep doen op de medewerking van dhr A. SCHOBBENS. De afrondingen voorgesteld in het tweede gedeelte werden uitgerekend met de samenwerking van dhr Jean-Pierre ANDRE-DUMONT.

*

De heer Professor G. WUNSCH en mevrouw C. WATTELAR hebben bereidwillig hun opmerkingen en suggesties gegeven betreffende het eerste deel van dit werk; dhr P. BAERT deed hetzelfde betreffende het tweede gedeelte. De heren H. LARMUSEAU en F. DESMEDT stonden in voor de Nederlandse tekst. Ik houd eraan allen te danken voor hun medewerking.

R. DEREYMAEKER

Directeur-Generaal van het
Nationaal Instituut voor de Statistiek.

INHOUDSOPGAVE.

(1) Uittreksel uit het „*Statistisch Tijdschrift*" nr 3, 1975.
(2) Uittreksel uit het „*Statistisch Tijdschrift*" nr 11-12, 1974.

BRUTO- EN AFGERONDE STERFTETAFELS 1968-1972.

I. Bruto-sterftetafels 1968-1972
Evolutie van de mortaliteit in België voor de periode 1959-1972

1. — Inleiding.

Dit artikel wil enkele aspecten belichten van de evolutie van de sterfte in België tijdens de periode 1959-1972; hierbij wordt uitgegaan van een studie die gebaseerd is op twee transversale sterftetafels opgemaakt aan de hand van waarnemingen rond de volkstellingen van 1961 en 1970. De eerste is de sterftetafel 1959-1963 die gebaseerd is op gegevens van de Belgische volkstelling op 31 december 1961; de tweede is de sterftetafel 1968-1972 gebaseerd op de telling van 31 december 1970.

Voor deze studie werd geen beroep gedaan op de sterftetafel 1963-1966 die door het Nationaal Instituut voor de Statistiek werd berekend op basis van de leeftijdsopbouw en de verdeling volgens geslacht, afgeleid uit de telling van 1961, en de sterfgevallen, de geboorten en de jaarlijkse migraties. Inderdaad, de migratie per leeftijdsgroep heeft de leeftijdsstructuur lichtjes scheefgetrokken. Door het invoeren van de gegevens uit dergelijke sterftetafel zou men de heterogeniteit van de gebruikte demografische gegevens in de hand werken; in dit geval zouden immers bepaalde gegevens voortkomen uit tellingen en andere berekeningen. Deze berekeningen werden trouwens alleen ten indicatieve titel uitgevoerd.

2. — Notaties.

x	leeftijd in exacte jaren.
$\underline{x}$	leeftijd in verstreken jaren.
${}_tq_x$	sterftekans op leeftijd x, voor een interval van t jaren.
${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$	overlevingskans op leeftijd x, voor een interval van t jaren.
$q_x \equiv {}_1q_x$	sterftekans op leeftijd x, voor een interval van één jaar.
$p_x \equiv {}_1p_x$	overlevingskans op leeftijd x, voor een interval van één jaar.
l_x	aantal overlevenden op leeftijd x.
$d_x = l_x - l_{x+1}$	aantal sterfgevallen op leeftijd x.
T_x	toevallige veranderlijke gelijk aan de resterende levensduur van een persoon op leeftijd x. $0 < T_x < \infty$, of $0 \leqslant T_x \leqslant \Omega : l_\Omega = 0$.
$F_{T_x}(t) = {}_tq_x$	verdelingsfunctie van de toevallige veranderlijke T, of sterftekans op leeftijd x, voor een interval van t jaren.
$\mathring{e}_x = E(T_x)$	verwachte levensduur op leeftijd x.
$L_{\underline{x}}$	aantal overlevenden op leeftijd x (in verstreken jaren).

Opmerkingen :

1. $\displaystyle {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}; \qquad p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}; \qquad q_x = \frac{d_x}{l_x}$

2. $\displaystyle \mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x\,dt \simeq \frac{1}{l_x}\sum_{\alpha=0}^{\Omega-x-1} l_{x+\alpha} - \frac{1}{2}$

3. $$L_{\underline{x}} = \begin{cases} 0{,}85\,l_1 + 0{,}15\,l_0 & : x = 0 \\ \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1}) + \frac{1}{24}(d_{x+1} - d_{x-1}) & : x > 0 \end{cases}$$

* * *

3. — Bruto sterftetafels 1968-1972.

a. *Verzameling van de gegevens en berekeningen.*

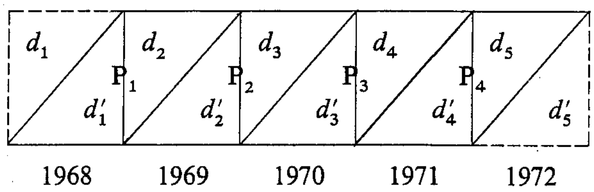
i — Referentiejaren.

De sterfgevallen van 1968, 1969, 1970, 1971, 1972 werden overgenomen uit de statistiek van de sterfgevallen per leeftijd en per generatie.

ii — Sterftequotiënten.

A. De sterftequotiënten voor de leeftijden hoger dan één jaar, werden bekomen door toepassing van volgende formule :

$$\frac{(d_2 + d_3 + d_4 + d_5) + (d_1' + d_2' + d_3' + d_4')}{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) + (d_1' + d_2' + d_3' + d_4')}$$



waarbij :

— P_i de levenden voorstellen voor de beschouwde leeftijden (in verstreken jaren) op het einde van het jaar.

— d_i en d_i' stellen de sterfgevallen voor respectievelijk vóór en na de verjaardag van de geboorte.

B. Het sterftequotiënt voor de leeftijd nul werd bekomen door toepassing van volgende formule :

$$\frac{(d_2 + d_3 + d_4 + d_5) + (d_1' + d_2' + d_3' + d_4')}{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}$$

waarbij B_i de levende geboorten voorstellen (exacte leeftijd nul).

Het sterftequotiënt bij de leeftijd één werd berekend met een analoge formule waarbij B_i het aantal overlevenden van de leeftijd één (in exacte jaren) voorstelt.

*

b. *Resultaten.*

Men vindt in de tabellen I, II, III de brutosterftetafels voor :

— de vrouwelijke bevolking : tabel I ;

— de mannelijke bevolking : tabel II ;

— de totale bevolking : tabel III.

Elke tabel bevat respectievelijk, in functie van de leeftijd x, de volgende grootheden :

$$q_x,\ p_x,\ l_x,\ d_x,\ \mathring{e}_x,\ L_{\underline{x}}.$$

Men merkt op dat, in tegenstelling met de tafels 1959-1963, de tafels 1968-1972 berekend werden rekening houdend met de levenloos aangegeven kinderen.

Ter inlichting, zonder rekening te houden met de levenloos aangegeven kinderen, zou men een overlijdenskans op leeftijd 0 jaar bekomen gelijk aan:

0.012 058 voor de vrouwelijke bevolking.
0.015 994 voor de mannelijke bevolking.

In dit geval wordt de verwachte levensduur:

74.62 jaar voor de vrouwen.
68.34 jaar voor de mannen.
71.44 jaar voor de totale bevolking.

Tabel I. — Bruto sterftetafels 1968-1972; Vrouwelijke bevolking.

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
0	0.017632	0.982368	1000000	17632	74.21	985013	0
1	0.001324	0.998676	982368	1301	74.53	978424	1
2	0.000854	0.999146	981067	837	73.63	977224	2
3	0.000550	0.999450	980230	540	72.69	976472	3
4	0.000502	0.999498	979690	491	71.73	975870	4
5	0.000414	0.999586	979199	406	70.77	975333	5
6	0.000328	0.999672	978793	321	69.79	974868	6
7	0.000339	0.999661	978472	332	68.82	974453	7
8	0.000358	0.999642	978140	350	67.84	974062	8
9	0.000296	0.999704	977790	289	66.86	973695	9
10	0.000254	0.999746	977501	248	65.88	973353	10
11	0.000296	0.999704	977253	290	64.90	973017	11
12	0.000311	0.999689	976963	304	63.92	972668	12
13	0.000309	0.999691	976659	301	62.94	972297	13
14	0.000313	0.999687	976358	306	61.96	971896	14
15	0.000348	0.999652	976052	340	60.98	971438	15
16	0.000397	0.999603	975712	387	60.00	970867	16
17	0.000435	0.999565	975325	424	59.02	970150	17
18	0.000524	0.999476	974901	511	58.05	969312	18
19	0.000580	0.999420	974390	565	57.08	968342	19
20	0.000606	0.999394	973825	590	56.11	967291	20
21	0.000555	0.999445	973235	540	55.15	966259	21
22	0.000555	0.999445	972695	540	54.18	965239	22
23	0.000535	0.999465	972155	520	53.21	964288	23
24	0.000547	0.999453	971635	532	52.23	963375	24
25	0.000664	0.999336	971103	645	51.26	962460	25
26	0.000635	0.999365	970458	616	50.30	961499	26
27	0.000679	0.999321	969842	659	49.33	960486	27
28	0.000678	0.999322	969183	657	48.36	959517	28
29	0.000792	0.999208	968526	767	47.39	958512	29
30	0.000728	0.999272	967759	704	46.43	957444	30
31	0.000742	0.999258	967055	718	45.46	956389	31
32	0.000867	0.999133	966337	838	44.50	955274	32
33	0.000902	0.999098	965499	870	43.53	954103	33
34	0.000969	0.999031	964629	935	42.57	952883	34
35	0.000976	0.999024	963694	941	41.61	951596	35
36	0.001256	0.998744	962753	1209	40.65	950171	36
37	0.001131	0.998869	961544	1087	39.71	948628	37
38	0.001296	0.998704	960457	1245	38.75	947053	38
39	0.001676	0.998324	959212	1608	37.80	945245	39
40	0.001545	0.998455	957604	1479	36.86	943222	40
41	0.001742	0.998258	956125	1666	35.92	941090	41
42	0.002026	0.997974	954459	1934	34.98	938660	42
43	0.002237	0.997763	952525	2130	34.05	935962	43
44	0.002506	0.997494	950395	2382	33.13	933047	44
45	0.002619	0.997381	948013	2483	32.21	929781	45
46	0.002988	0.997012	945530	2825	31.29	926189	46
47	0.003240	0.996760	942705	3055	30.38	922251	47
48	0.003561	0.996439	939650	3346	29.48	917973	48
49	0.003940	0.996060	936304	3689	28.58	913299	49

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
50	0.004520	0.995480	932615	4215	27.69	908012	50
51	0.004609	0.995391	928400	4279	26.82	902085	51
52	0.005212	0.994788	924121	4817	25.94	895665	52
53	0.005275	0.994725	919304	4849	25.07	888814	53
54	0.006340	0.993660	914455	5798	24.20	881188	54
55	0.006610	0.993390	908657	6006	23.35	872691	55
56	0.006911	0.993089	902651	6238	22.51	863687	56
57	0.007866	0.992134	896413	7051	21.66	853981	57
58	0.008546	0.991454	889362	7601	20.83	843449	58
59	0.009367	0.990633	881761	8259	20.00	831887	59
60	0.010303	0.989697	873502	9000	19.19	819192	60
61	0.011222	0.988778	864502	9701	18.38	805558	61
62	0.012866	0.987134	854801	10998	17.58	790601	62
63	0.014198	0.985802	843803	11981	16.81	774200	63
64	0.015422	0.984578	831822	12828	16.04	756770	64
65	0.017591	0.982409	818994	14407	15.29	738138	65
66	0.019414	0.980586	804587	15620	14.55	717840	66
67	0.021688	0.978312	788967	17111	13.83	696371	67
68	0.024057	0.975943	771856	18569	13.12	673711	68
69	0.027013	0.972987	753287	20348	12.44	649528	69
70	0.030691	0.969309	732939	22495	11.77	623862	70
71	0.034202	0.965798	710444	24299	11.12	596864	71
72	0.038197	0.961803	686145	26208	10.50	568649	72
73	0.043068	0.956932	659937	28422	9.90	539278	73
74	0.047591	0.952409	631515	30055	9.32	508938	74
75	0.053373	0.946627	601460	32102	8.76	477550	75
76	0.058910	0.941090	569358	33540	8.23	445385	76
77	0.066766	0.933234	535818	35775	7.71	412514	77
78	0.073387	0.926613	500043	36696	7.23	379154	78
79	0.084355	0.915645	463347	39086	6.76	345156	79
80	0.091933	0.908067	424261	39004	6.33	310923	80
81	0.101445	0.898555	385257	39082	5.93	277515	81
82	0.101578	0.898422	346175	35164	5.54	246021	82
83	0.126979	0.873021	311011	39492	5.11	215061	83
84	0.136779	0.863221	271519	37138	4.78	184462	84
85	0.152317	0.847683	234381	35700	4.46	155932	85
86	0.165043	0.834957	198681	32791	4.17	129592	86
87	0.181567	0.818433	165890	30120	3.89	105927	87
88	0.191993	0.808007	135770	26067	3.64	85084	88
89	0.213728	0.786272	109703	23447	3.39	66853	89
90	0.228843	0.771157	86256	19739	3.18	51183	90
91	0.246331	0.753669	66517	16385	2.97	38419	91
92	0.264457	0.735543	50132	13258	2.78	28223	92
93	0.291445	0.708555	36874	10747	2.60	20144	93
94	0.285641	0.714359	26127	7463	2.46	14049	94
95	0.311861	0.688139	18664	5820	2.24	9667	95
96	0.342497	0.657503	12844	4399	2.03	6431	96
97	0.352998	0.647002	8445	2981	1.83	4143	97
98	0.359091	0.640909	5464	1962	1.55	2683	98
99	0.361386	0.638614	3502	1266	1.14		99

Tabel II. — Bruto sterftetafels 1968-1972; Mannelijke bevolking.

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
0	0.023911	0.976089	1000000	23911	67.79	979676	0
1	0.001592	0.998408	976089	1554	68.44	975312	1
2	0.000992	0.999008	974535	967	67.55	974018	2
3	0.000755	0.999245	973568	735	66.61	973188	3
4	0.000678	0.999322	972833	659	65.66	972497	4
5	0.000602	0.999398	972174	586	64.71	971876	5
6	0.000561	0.999439	971588	545	63.75	971311	6
7	0.000475	0.999525	971043	461	62.78	970807	7
8	0.000429	0.999571	970582	416	61.81	970372	8
9	0.000424	0.999576	970166	412	60.84	969960	9
10	0.000431	0.999569	969754	418	59.86	969544	10
11	0.000402	0.999598	969336	389	58.89	969141	11
12	0.000422	0.999578	968947	409	57.91	968746	12
13	0.000481	0.999519	968538	466	56.94	968310	13
14	0.000547	0.999453	968072	530	55.96	967815	14
15	0.000687	0.999313	967542	664	54.99	967225	15
16	0.000913	0.999087	966878	883	54.03	966456	16
17	0.001180	0.998820	965995	1140	53.08	965440	17
18	0.001286	0.998714	964855	1241	52.14	964250	18
19	0.001560	0.998440	963614	1503	51.21	962872	19
20	0.001528	0.998472	962111	1470	50.29	961375	20
21	0.001543	0.998457	960641	1482	49.36	959899	21
22	0.001509	0.998491	959159	1448	48.44	958426	22
23	0.001312	0.998688	957711	1256	47.51	957077	23
24	0.001370	0.998630	956455	1311	46.57	955795	24
25	0.001201	0.998799	955144	1147	45.64	954575	25
26	0.001465	0.998535	953997	1397	44.69	953305	26
27	0.001376	0.998624	952600	1311	43.76	951938	27
28	0.001298	0.998702	951289	1235	42.82	950673	28
29	0.001409	0.998591	950054	1338	41.87	949392	29
30	0.001486	0.998514	948716	1410	40.93	948012	30
31	0.001454	0.998546	947306	1378	39.99	946621	31
32	0.001587	0.998413	945928	1501	39.05	945181	32
33	0.001536	0.998464	944427	1450	38.11	943706	33
34	0.001703	0.998297	942977	1606	37.17	942182	34
35	0.001763	0.998237	941371	1660	36.23	940552	35
36	0.001982	0.998018	939711	1862	35.29	938793	36
37	0.002095	0.997905	937849	1965	34.36	936873	37
38	0.002171	0.997829	935884	2032	33.43	934883	38
39	0.002488	0.997512	933852	2323	32.50	932715	39
40	0.002820	0.997180	931529	2627	31.58	930234	40
41	0.002987	0.997013	928902	2775	30.67	927543	41
42	0.003569	0.996431	926127	3305	29.76	924499	42
43	0.003658	0.996342	922822	3376	28.87	921154	43
44	0.004112	0.995888	919446	3781	27.97	917597	44
45	0.004782	0.995218	915665	4379	27.08	913512	45
46	0.005098	0.994902	911286	4645	26.21	908997	46
47	0.005720	0.994280	906641	5186	25.34	904084	47
48	0.006110	0.993890	901455	5508	24.49	898742	48
49	0.006894	0.993106	895947	6177	23.63	892922	49
50	0.007900	0.992100	889770	7029	22.79	886336	50
51	0.009169	0.990831	882741	8094	21.97	878752	51
52	0.009629	0.990371	874647	8422	21.17	870489	52
53	0.010797	0.989203	866225	9352	20.37	861634	53
54	0.012209	0.987791	856873	10462	19.59	851733	54
55	0.013627	0.986373	846411	11534	18.82	840716	55
56	0.014608	0.985392	834877	12196	18.08	828853	56
57	0.016173	0.983827	822681	13305	17.34	816106	57

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
58	0.017376	0.982624	809376	14064	16.61	802464	58
59	0.020345	0.979655	795312	16180	15.90	787354	59
60	0.022108	0.977892	779132	17226	15.22	770623	60
61	0.024504	0.975496	761906	18669	14.55	752706	61
62	0.027525	0.972475	743237	20458	13.91	733149	62
63	0.030501	0.969499	722779	22045	13.28	711857	63
64	0.032653	0.967347	700734	22881	12.69	689394	64
65	0.036094	0.963906	677853	24467	12.10	665769	65
66	0.040508	0.959492	653386	26467	11.53	640240	66
67	0.042359	0.957641	626919	26556	11.00	613722	67
68	0.047313	0.952687	600363	28405	10.46	586277	68
69	0.051319	0.948681	571958	29352	9.96	557365	69
70	0.056016	0.943984	542606	30395	9.47	527467	70
71	0.060058	0.939942	512211	30762	9.00	496879	71
72	0.065576	0.934424	481449	31572	8.54	465682	72
73	0.069375	0.930625	449877	31210	8.11	434276	73
74	0.075600	0.924400	418667	31651	7.68	402860	74
75	0.081771	0.918229	387016	31647	7.26	371179	75
76	0.088174	0.911826	355369	31334	6.87	339663	76
77	0.094759	0.905241	324035	30705	6.48	308632	77
78	0.102717	0.897283	293330	30130	6.11	278221	78
79	0.112678	0.887322	263200	29657	5.75	248300	79
80	0.121685	0.878315	233543	28419	5.41	219196	80
81	0.128535	0.871465	205124	26365	5.10	191804	81
82	0.140535	0.859465	178759	25122	4.77	166081	82
83	0.153413	0.846587	153637	23570	4.47	141701	83
84	0.165254	0.834746	130067	21494	4.19	119155	84
85	0.180748	0.819252	108573	19625	3.92	98582	85
86	0.193343	0.806657	88948	17197	3.68	80149	86
87	0.206489	0.793511	71751	14816	3.44	64161	87
88	0.225193	0.774807	56935	12821	3.21	50365	88
89	0.249347	0.750653	44114	11000	2.99	38450	89
90	0.268623	0.731377	33114	8895	2.82	28489	90
91	0.278291	0.721709	24219	6740	2.67	20695	91
92	0.297470	0.702530	17479	5199	2.51	14758	92
93	0.312150	0.687850	12280	3834	2.36	10269	93
94	0.349831	0.650169	8446	2954	2.20	6888	94
95	0.341749	0.658251	5492	1877	2.12	4487	95
96	0.375566	0.624434	3615	1358	1.96	2892	96
97	0.362637	0.637363	2257	818	1.84	1811	97
98	0.320285	0.679715	1439	461	1.61	1189	98
99	0.370752	0.629248	978	363	1.13		99

Tabel III. — Bruto sterftetafels 1968-1972; Totale bevolking.

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
0	0.020861	0.979139	1000000	20861	70.95	982268	0
1	0.001461	0.998539	979139	1431	71.45	978424	1
2	0.000924	0.999076	977708	903	70.55	977224	2
3	0.000655	0.999345	976805	640	69.62	976472	3
4	0.000592	0.999408	976165	578	68.66	975870	4
5	0.000510	0.999490	975587	497	67.70	975333	5
6	0.000447	0.999553	975090	436	66.74	974868	6
7	0.000408	0.999592	974654	398	65.77	974453	7
8	0.000394	0.999606	974256	384	64.79	974062	8
9	0.000361	0.999639	973872	351	63.82	973695	9
10	0.000344	0.999656	973521	335	62.84	973353	10
11	0.000350	0.999650	973186	341	61.86	973017	11
12	0.000368	0.999632	972845	358	60.88	972668	12
13	0.000397	0.999603	972487	386	59.91	972297	13
14	0.000432	0.999568	972101	420	58.93	971896	14
15	0.000520	0.999480	971681	505	57.96	971438	15
16	0.000660	0.999340	971176	641	56.99	970867	16
17	0.000815	0.999185	970535	791	56.02	970150	17
18	0.000913	0.999087	969744	885	55.07	969312	18
19	0.001080	0.998920	968859	1047	54.12	968342	19
20	0.001075	0.998925	967812	1040	53.18	967291	20
21	0.001059	0.998941	966772	1024	52.23	966259	21
22	0.001043	0.998957	965748	1007	51.29	965239	22
23	0.000932	0.999068	964741	899	50.34	964288	23
24	0.000968	0.999032	963842	933	49.39	963375	24
25	0.000939	0.999061	962909	904	48.43	962460	25
26	0.001059	0.998941	962005	1019	47.48	961499	26
27	0.001035	0.998965	960986	995	46.53	960486	27
28	0.000994	0.999006	959991	954	45.58	959517	28
29	0.001105	0.998895	959037	1060	44.62	958512	29
30	0.001112	0.998888	957977	1065	43.67	957444	30
31	0.001102	0.998898	956912	1055	42.72	956389	31
32	0.001230	0.998770	955857	1175	41.77	955274	32
33	0.001222	0.998778	954682	1167	40.82	954103	33
34	0.001339	0.998661	953515	1277	39.87	952883	34
35	0.001372	0.998628	952238	1306	38.92	951596	35
36	0.001621	0.998379	950932	1542	37.97	950171	36
37	0.001615	0.998385	949390	1533	37.03	948628	37
38	0.001735	0.998265	947857	1644	36.09	947053	38
39	0.002083	0.997917	946213	1971	35.15	945245	39
40	0.002183	0.997817	944242	2062	34.23	943222	40
41	0.002365	0.997635	942180	2228	33.30	941090	41
42	0.002797	0.997203	939952	2629	32.38	938660	42
43	0.002945	0.997055	937323	2760	31.47	935962	43
44	0.003305	0.996695	934563	3089	30.56	933047	44
45	0.003694	0.996306	931474	3441	29.66	929781	45
46	0.004036	0.995964	928033	3745	28.77	926189	46
47	0.004469	0.995531	924288	4131	27.88	922251	47
48	0.004821	0.995179	920157	4436	27.00	917973	48
49	0.005399	0.994601	915721	4944	26.13	913299	49
50	0.006186	0.993814	910777	5634	25.27	908012	50
51	0.006848	0.993152	905143	6199	24.42	902085	51
52	0.007381	0.992619	898944	6635	23.59	895665	52
53	0.007976	0.992024	892309	7117	22.76	888814	53
54	0.009205	0.990795	885192	8148	21.94	881188	54
55	0.010029	0.989971	877044	8796	21.14	872691	55
56	0.010640	0.989360	868248	9238	20.35	863687	56
57	0.011869	0.988131	859010	10196	19.56	853981	57

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
58	0.012842	0.987158	848814	10900	18.79	843449	58
59	0.014608	0.985392	837914	12240	18.03	831887	59
60	0.015897	0.984103	825674	13126	17.29	819192	60
61	0.017472	0.982528	812548	14197	16.56	805558	61
62	0.019708	0.980292	798351	15734	15.85	790601	62
63	0.021739	0.978261	782617	17013	15.15	774200	63
64	0.023343	0.976657	765604	17872	14.48	756770	64
65	0.026019	0.973981	747732	19455	13.81	738138	65
66	0.028939	0.971061	728277	21075	13.17	717840	66
67	0.030915	0.969085	707202	21864	12.55	696371	67
68	0.034295	0.965705	685338	23503	11.93	673711	68
69	0.037562	0.962438	661835	24860	11.34	649528	69
70	0.041522	0.958478	636975	26449	10.76	623862	70
71	0.045088	0.954912	610526	27527	10.20	596864	71
72	0.049556	0.950444	582999	28891	9.66	568649	72
73	0.053823	0.946177	554108	29824	9.14	539278	73
74	0.058866	0.941134	524284	30862	8.63	508938	74
75	0.064598	0.935402	493422	31874	8.14	477550	75
76	0.070287	0.929713	461548	32441	7.67	445385	76
77	0.077535	0.922465	429107	33271	7.21	412514	77
78	0.084538	0.915462	395836	33463	6.77	379154	78
79	0.095106	0.904894	362373	34464	6.35	345156	79
80	0.103184	0.896816	327909	33835	5.97	310923	80
81	0.111628	0.888372	294074	32827	5.60	277515	81
82	0.116173	0.883827	261247	30350	5.24	246021	82
83	0.136814	0.863186	230897	31590	4.86	215061	83
84	0.147324	0.852676	199307	29362	4.55	184462	84
85	0.162740	0.837260	169945	27657	4.25	155932	85
86	0.175353	0.824647	142288	24951	3.98	129592	86
87	0.190522	0.809478	117337	22355	3.73	105927	87
88	0.203812	0.796188	94982	19359	3.48	85084	88
89	0.226246	0.773754	75623	17109	3.25	66853	89
90	0.242442	0.757558	58514	14186	3.05	51183	90
91	0.256972	0.743028	44328	11391	2.87	38419	91
92	0.275389	0.724611	32937	9071	2.69	28223	92
93	0.298110	0.701890	23866	7114	2.52	20144	93
94	0.305791	0.694209	16752	5123	2.38	14049	94
95	0.320704	0.679296	11629	3729	2.21	9667	95
96	0.351598	0.648402	7900	2778	2.01	6431	96
97	0.355944	0.644056	5122	1823	1.83	4143	97
98	0.347503	0.652497	3299	1146	1.57	2683	98
99	0.367336	0.632664	2153	791	1.13		99

4. — Evolutie van de sterfte over de periode 1959-1972.

a. *Evolutie van de sterftekans op de leeftijd x.*

Tabel IV verstrekt, respectievelijk voor de vrouwelijke en de mannelijke bevolking, de cijfers die de evolutie weergeven van de sterftekans over de periode 1959-1972.

Ter inlichting, zonder rekening te houden met de levenloos aangegeven kinderen, zou de 1e regel van tabel IV er als volgt uitzien :

0	0.012 058	0.018 660	−0.006 602
0.015 994	0.024 140	−0.008 146	0

Deze evolutie wordt geïllustreerd door een reeks van drieentwintig grafieken. Iedere grafiek vertoont twee krommen:

— deze in volle lijn stemt overeen met de periode 1959-1963;

— deze in streeplijn stemt overeen met de periode 1968-1972.

Hierna volgen de leeftijdszones waarop de verschillende grafieken betrekking hebben:

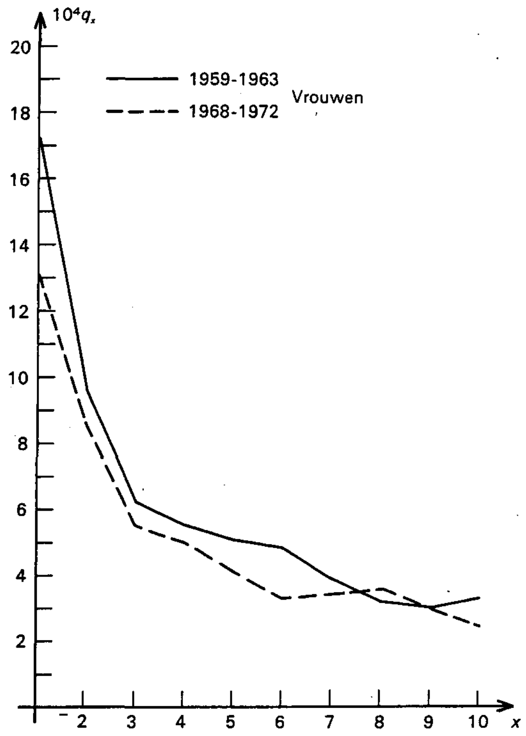
$1 \leqslant x \leqslant 10$: grafieken 1, 8 en 15
$10 \leqslant x \leqslant 30$: grafieken 2, 9 en 16
$30 \leqslant x \leqslant 45$: grafieken 3, 10 en 16
$45 \leqslant x \leqslant 60$: grafieken 4, 11 en 18
$60 \leqslant x \leqslant 75$: grafieken 5, 12 en 19
$75 \leqslant x \leqslant 85$: grafieken 6, 13 en 20
$85 \leqslant x \leqslant 99$: grafieken 7, 14 en 21
$0 \leqslant x \leqslant 99$: grafieken 22 en 23.

Tabel IV. — Evolutie van de sterftekans op leeftijd *x*.

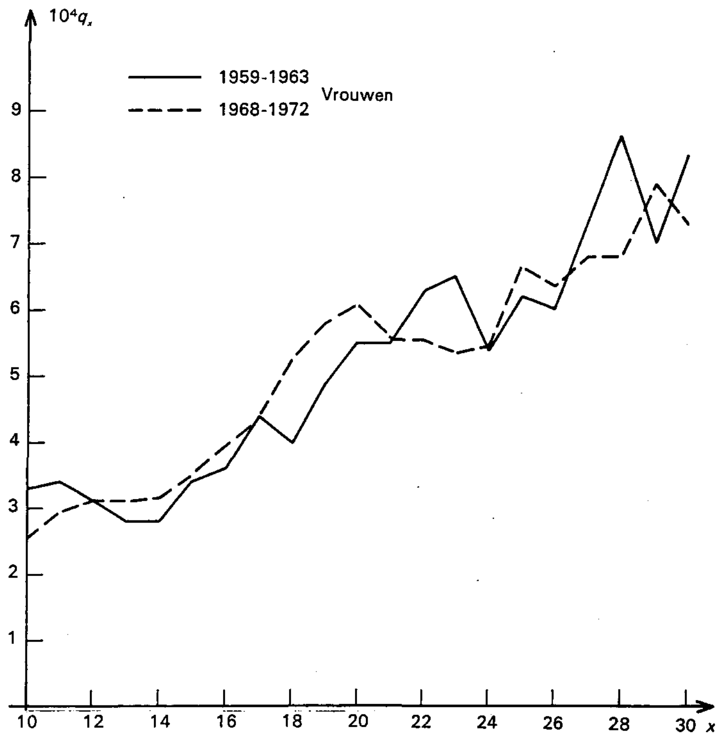
x	Vrouwen			Mannen			x
	q_x 1968-1972	q_x 1959-1963	Verschil	q_x 1968-1972	q_x 1959-1963	Verschil	
0	0.017632	0.024970	−0.007338	0.023911	0.032430	−0.008519	0
1	0.001324	0.001720	−0.000396	0.001592	0.001860	−0.000268	1
2	0.000854	0.000960	−0.000106	0.000992	0.001120	−0.000128	2
3	0.000550	0.000620	−0.000070	0.000755	0.000860	−0.000105	3
4	0.000502	0.000550	−0.000048	0.000678	0.000760	−0.000082	4
5	0.000414	0.000510	−0.000096	0.000602	0.000630	−0.000028	5
6	0.000328	0.000490	−0.000162	0.000561	0.000640	−0.000079	6
7	0.000339	0.000390	−0.000051	0.000475	0.000550	−0.000075	7
8	0.000358	0.000320	0.000038	0.000429	0.000500	−0.000071	8
9	0.000296	0.000300	−0.000004	0.000424	0.000410	0.000014	9
10	0.000254	0.000330	−0.000076	0.000431	0.000520	−0.000089	10
11	0.000296	0.000340	−0.000044	0.000402	0.000410	−0.000008	11
12	0.000311	0.000310	0.000001	0.000422	0.000430	−0.000008	12
13	0.000309	0.000280	0.000029	0.000481	0.000450	0.000031	13
14	0.000313	0.000280	0.000033	0.000547	0.000580	−0.000033	14
15	0.000348	0.000340	0.000008	0.000687	0.000690	−0.000003	15
16	0.000397	0.000360	0.000037	0.000913	0.000810	0.000103	16
17	0.000435	0.000440	−0.000005	0.001180	0.000980	0.000200	17
18	0.000524	0.000400	0.000124	0.001286	0.001120	0.000166	18
19	0.000580	0.000490	0.000090	0.001560	0.001210	0.000350	19
20	0.000606	0.000550	0.000056	0.001528	0.001400	0.000128	20
21	0.000555	0.000550	0.000005	0.001543	0.001670	−0.000127	21
22	0.000555	0.000630	−0.000075	0.001509	0.001690	−0.000181	22
23	0.000535	0.000650	−0.000115	0.001312	0.001570	−0.000258	23
24	0.000547	0.000540	0.000007	0.001370	0.001460	−0.000090	24
25	0.000664	0.000620	0.000044	0.001201	0.001430	−0.000229	25
26	0.000635	0.000600	0.000035	0.001465	0.001350	0.000115	26
27	0.000679	0.000730	−0.000051	0.001376	0.001460	−0.000084	27
28	0.000678	0.000860	−0.000182	0.001298	0.001400	−0.000102	28
29	0.000792	0.000700	0.000092	0.001409	0.001540	−0.000131	29
30	0.000728	0.000830	−0.000102	0.001486	0.001610	−0.000124	30
31	0.000742	0.000780	−0.000038	0.001454	0.001720	−0.000266	31
32	0.000867	0.000940	−0.000073	0.001587	0.001570	0.000017	32
33	0.000902	0.001070	−0.000168	0.001536	0.001720	−0.000184	33
34	0.000969	0.001190	−0.000221	0.001703	0.001930	−0.000227	34
35	0.000976	0.001220	−0.000244	0.001763	0.001840	−0.000077	35
36	0.001256	0.001360	−0.000104	0.001982	0.002110	−0.000128	36
37	0.001131	0.001420	−0.000289	0.002095	0.002150	−0.000055	37
38	0.001296	0.001570	−0.000274	0.002171	0.002460	−0.000289	38
39	0.001676	0.001600	0.000076	0.002488	0.002780	−0.000292	39
40	0.001545	0.001840	−0.000295	0.002820	0.002850	−0.000030	40
41	0.001742	0.002000	−0.000258	0.002987	0.003010	−0.000023	41
42	0.002026	0.002060	−0.000034	0.003569	0.003710	−0.000141	42

x	Vrouwen			Mannen			x
	q_x 1968-1972	q_x 1959-1963	Verschil	q_x 1968-1972	q_x 1959-1963	Verschil	
43	0.002237	0.002270	−0.000033	0.003658	0.003890	−0.000232	43
44	0.002506	0.002470	0.000036	0.004112	0.004330	−0.000218	44
45	0.002619	0.002810	−0.000191	0.004782	0.004910	−0.000128	45
46	0.002988	0.003150	−0.000162	0.005098	0.005180	−0.000082	46
47	0.003240	0.003430	−0.000190	0.005720	0.005920	−0.000200	47
48	0.003561	0.003740	−0.000179	0.006110	0.006680	−0.000570	48
49	0.003940	0.003900	0.000040	0.006894	0.007280	−0.000386	49
50	0.004520	0.004210	0.000310	0.007900	0.008180	−0.000280	50
51	0.004609	0.004780	−0.000171	0.009169	0.009260	−0.000091	51
52	0.005212	0.005010	0.000202	0.009629	0.010300	−0.000671	52
53	0.005275	0.005530	−0.000255	0.010797	0.011480	−0.000683	53
54	0.006340	0.006120	0.000220	0.012209	0.012930	−0.000721	54
55	0.006610	0.006680	−0.000070	0.013627	0.013740	−0.000113	55
56	0.006911	0.007380	−0.000469	0.014608	0.015760	−0.001152	56
57	0.007866	0.008140	−0.000274	0.016173	0.017610	−0.001437	57
58	0.008546	0.008870	−0.000324	0.017376	0.019270	−0.001894	58
59	0.009367	0.009890	−0.000523	0.020345	0.020790	−0.000445	59
60	0.010303	0.011010	−0.000707	0.022108	0.023040	−0.000932	60
61	0.011222	0.012080	−0.000858	0.024504	0.024650	−0.000146	61
62	0.012866	0.013680	−0.000814	0.027525	0.027460	0.000065	62
63	0.014198	0.015020	−0.000822	0.030501	0.029860	0.000641	63
64	0.015422	0.016980	−0.001558	0.032653	0.032140	0.000513	64
65	0.017591	0.018590	−0.000999	0.036094	0.034740	0.001354	65
66	0.019414	0.020650	−0.001236	0.040508	0.037090	0.003418	66
67	0.021688	0.022770	−0.001082	0.042359	0.040500	0.001859	67
68	0.024057	0.026010	−0.001953	0.047313	0.042790	0.004523	68
69	0.027013	0.029110	−0.002097	0.051319	0.046750	0.004569	69
70	0.030691	0.031530	−0.000839	0.056016	0.051200	0.004816	70
71	0.034202	0.036840	−0.002638	0.060058	0.054100	0.005958	71
72	0.038197	0.041010	−0.002813	0.065576	0.058640	0.006936	72
73	0.043068	0.046120	−0.003052	0.069375	0.063010	0.006365	73
74	0.047591	0.050530	−0.002939	0.075600	0.069730	0.005870	74
75	0.053373	0.057070	−0.003697	0.081771	0.077350	0.004421	75
76	0.058910	0.064130	−0.005220	0.088174	0.085990	0.002184	76
77	0.066766	0.072520	−0.005754	0.094759	0.093550	0.001209	77
78	0.073387	0.080150	−0.006763	0.102717	0.099480	0.003237	78
78	0.084355	0.088570	−0.004215	0.112678	0.110180	0.002498	79
80	0.091933	0.098320	−0.006387	0.121685	0.118280	0.003405	80
81	0.101445	0.107080	−0.005635	0.128535	0.130020	−0.001485	81
82	0.101578	0.116900	−0.015322	0.140535	0.145280	−0.004745	82
83	0.126979	0.130400	−0.003421	0.153413	0.159220	−0.005807	83
84	0.136779	0.145180	−0.008401	0.165254	0.174900	−0.009646	84
85	0.152317	0.159230	−0.006913	0.180748	0.190220	−0.009472	85
86	0.165043	0.173150	−0.008107	0.193343	0.201460	−0.008117	86
87	0.181567	0.193330	−0.011763	0.206489	0.225140	−0.018651	87
88	0.191993	0.202970	−0.010977	0.225193	0.232660	−0.007467	88
89	0.213728	0.218500	−0.004772	0.249347	0.259840	−0.010493	89
90	0.228843	0.238270	−0.009427	0.268623	0.273990	−0.005367	90
91	0.246331	0.257630	−0.011299	0.278291	0.294600	−0.016309	91
92	0.264457	0.274710	−0.010253	0.297470	0.311690	−0.014220	92
93	0.291445	0.288820	0.002625	0.312150	0.326550	−0.014400	93
94	0.285641	0.310120	−0.024479	0.349831	0.357510	−0.007679	94
95	0.311861	0.314660	−0.002799	0.341749	0.390280	−0.048531	95
96	0.342497	0.315930	0.026567	0.375566	0.391410	−0.015844	96
97	0.352998	0.370000	−0.017002	0.362637	0.410360	−0.047723	97
98	0.359091	0.377400	−0.018309	0.320285	0.359480	−0.039195	98
99	0.361386	0.344830	0.016556	0.370752	0.413460	−0.042708	99

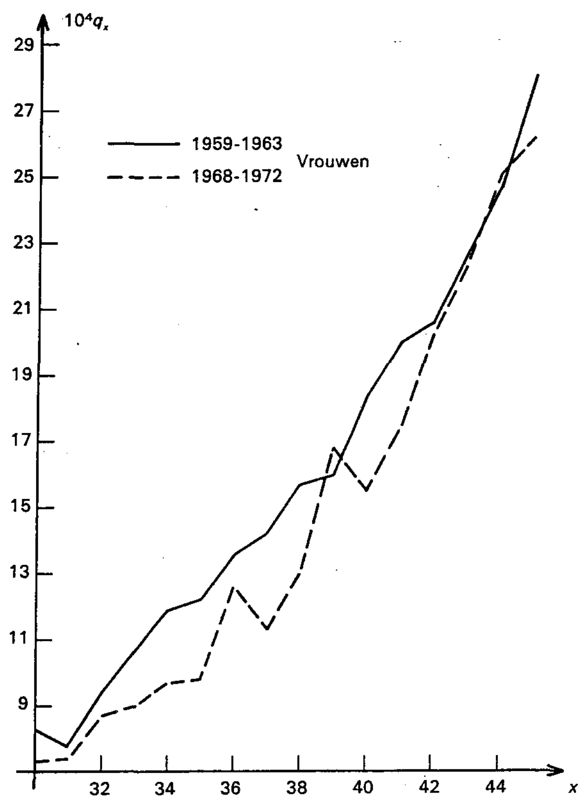
GRAFIEK 1.



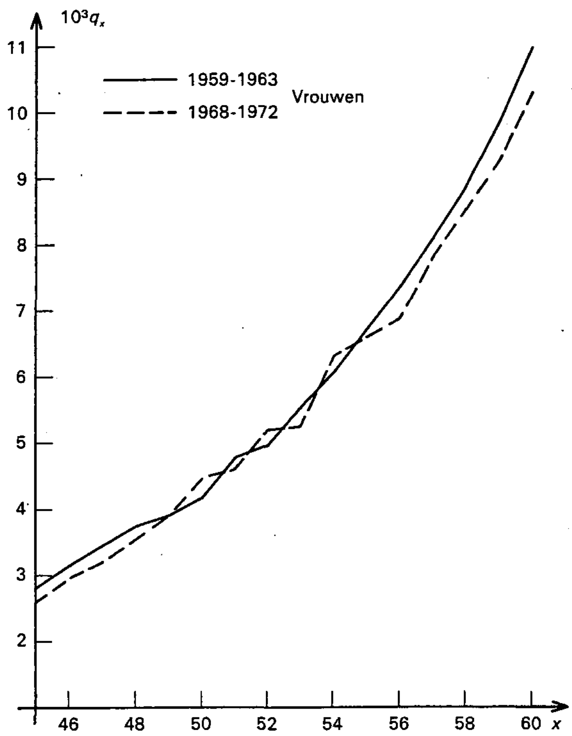
GRAFIEK 2.



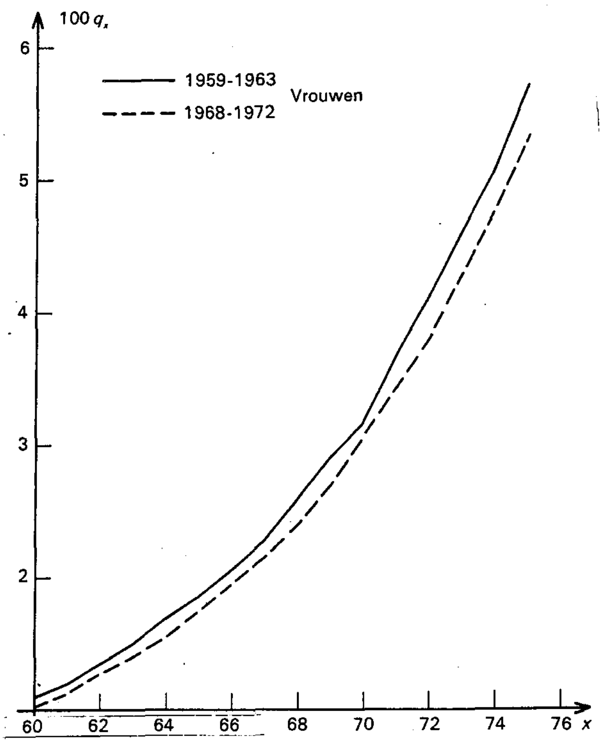
GRAFIEK 3.



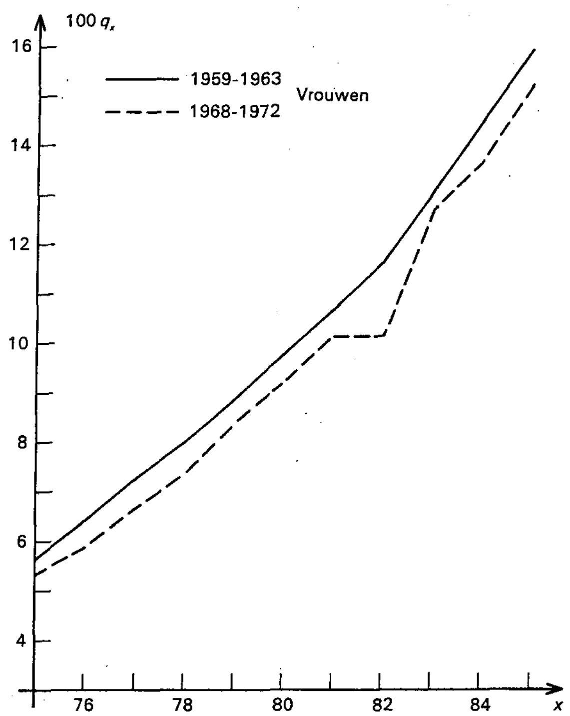
GRAFIEK 4.



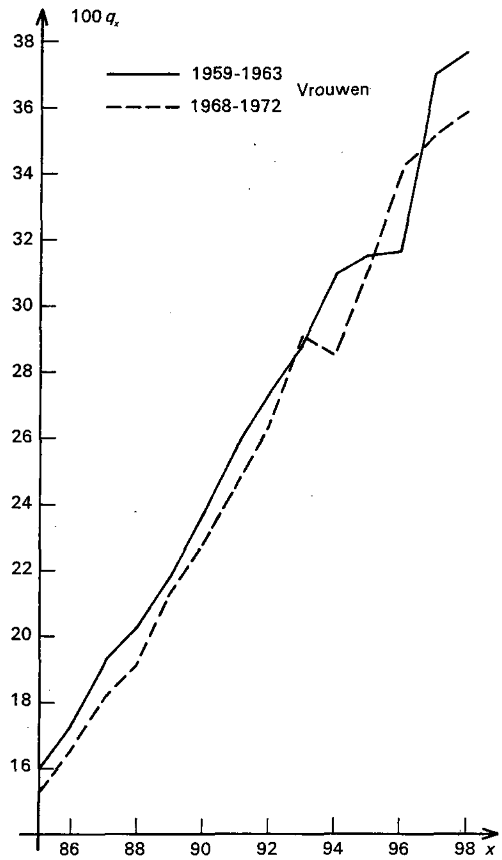
GRAFIEK 5.



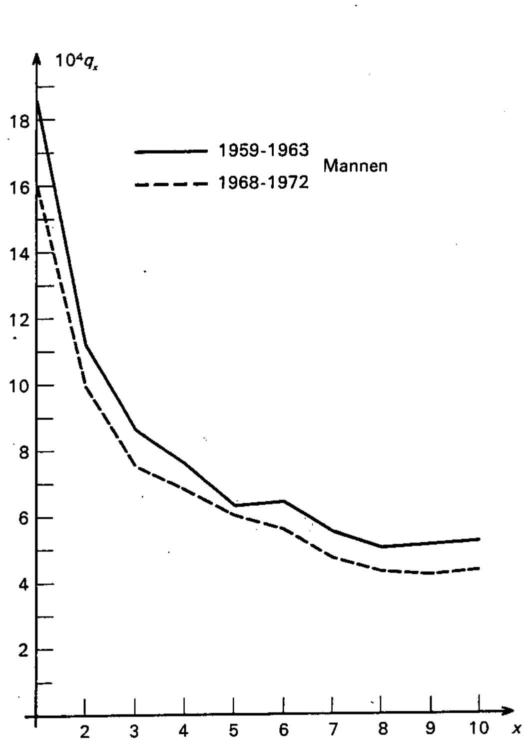
GRAFIEK 6.



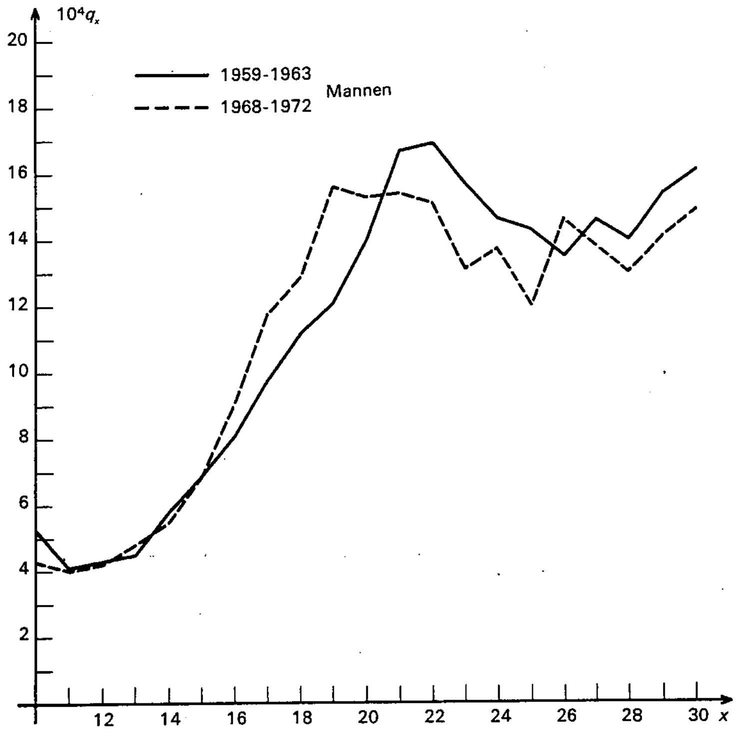
GRAFIEK 7.



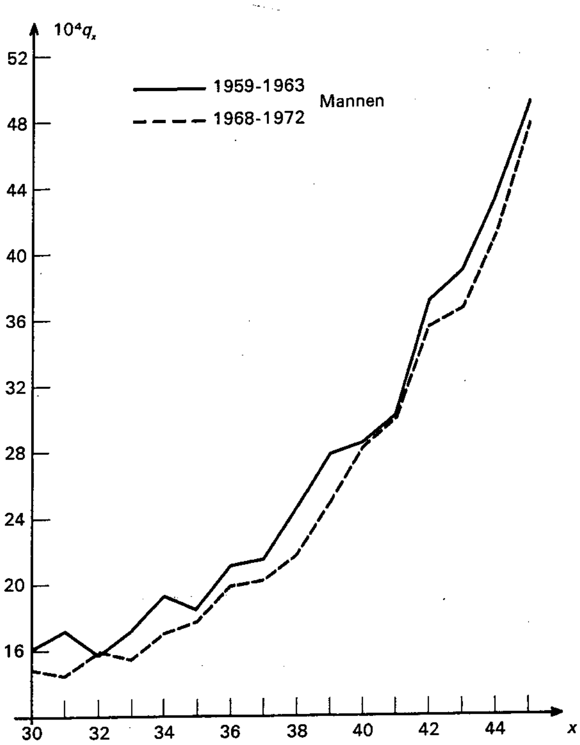
GRAFIEK 8.



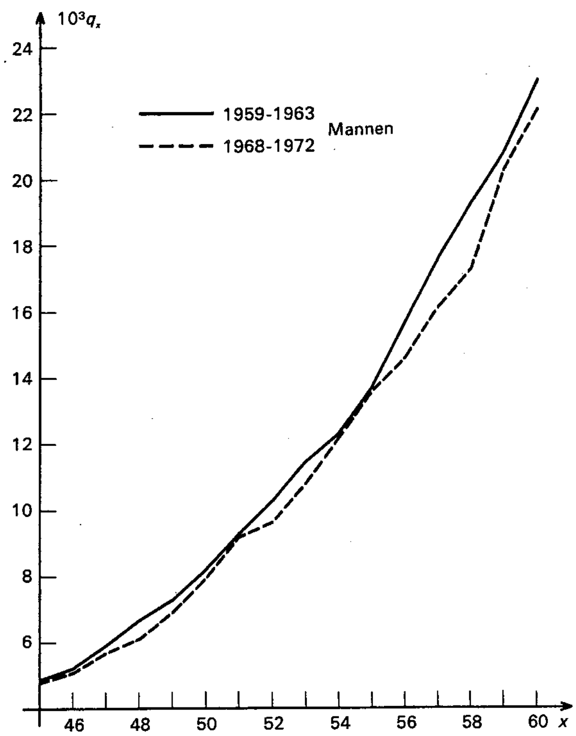
GRAFIEK 9.



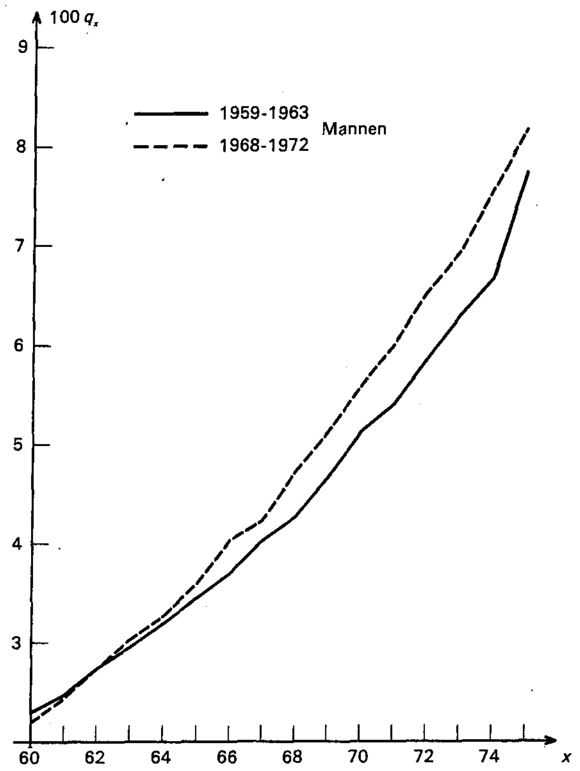
GRAFIEK 10.



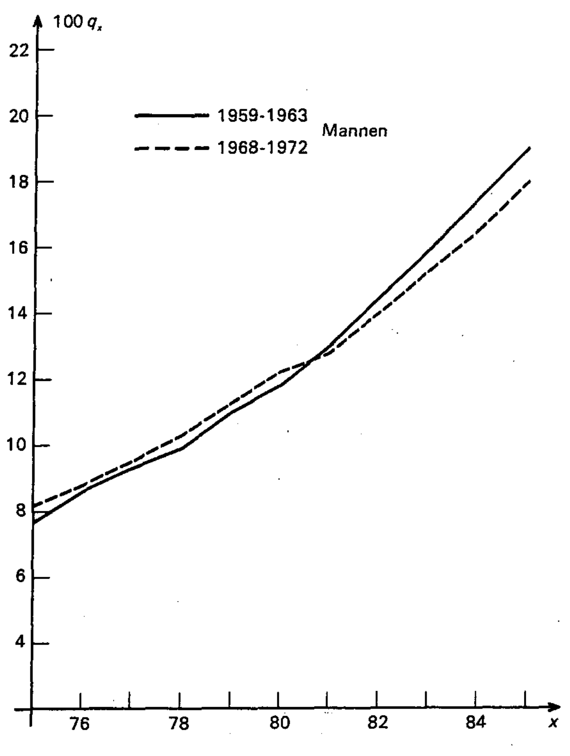
GRAFIEK 11.



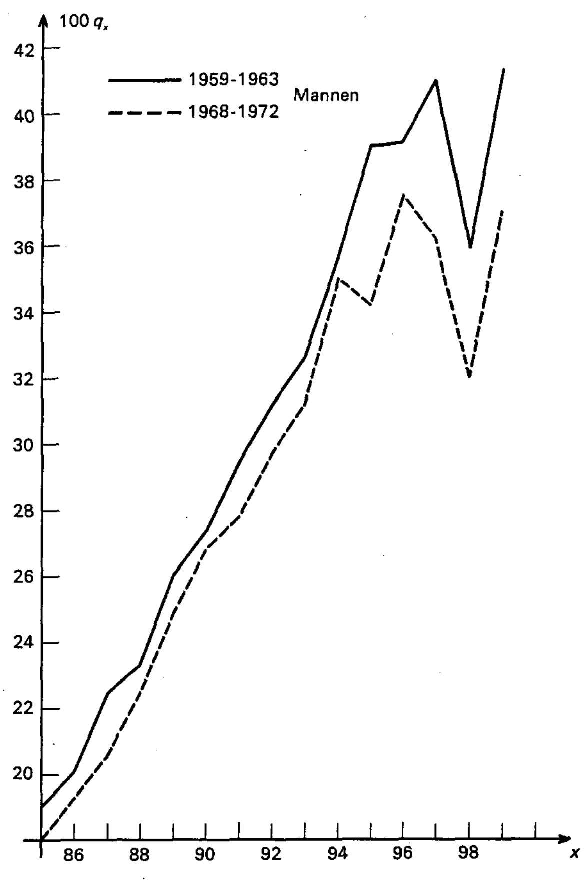
GRAFIEK 12.



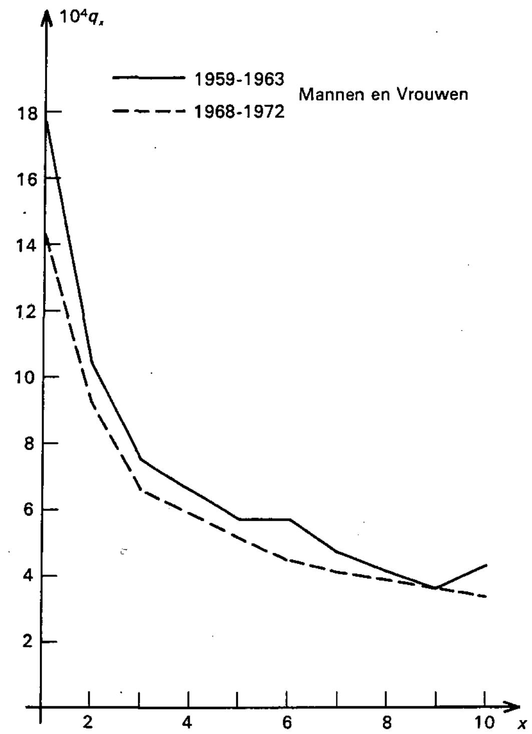
GRAFIEK 13.



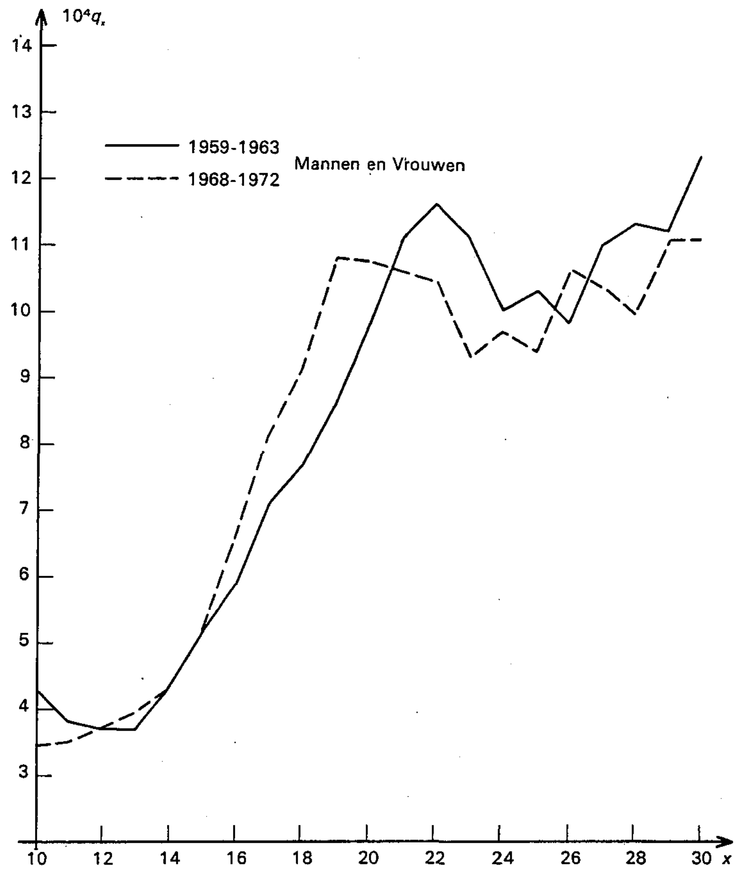
GRAFIEK 14.



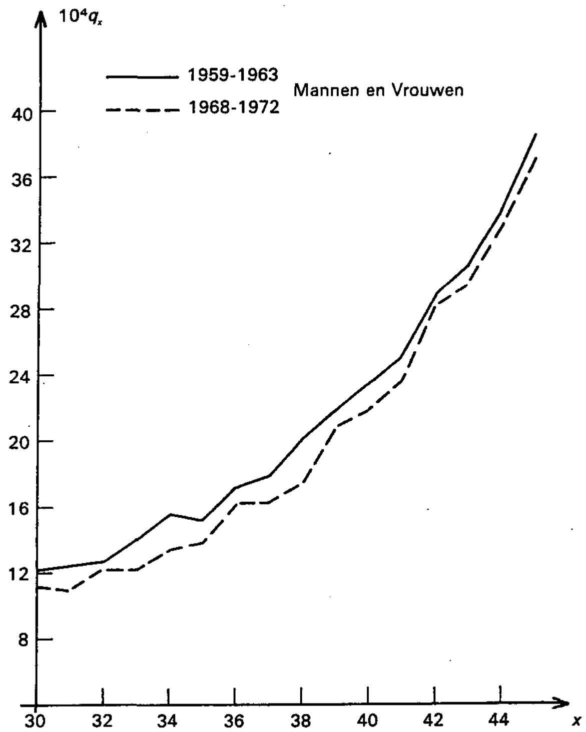
GRAFIEK 15.



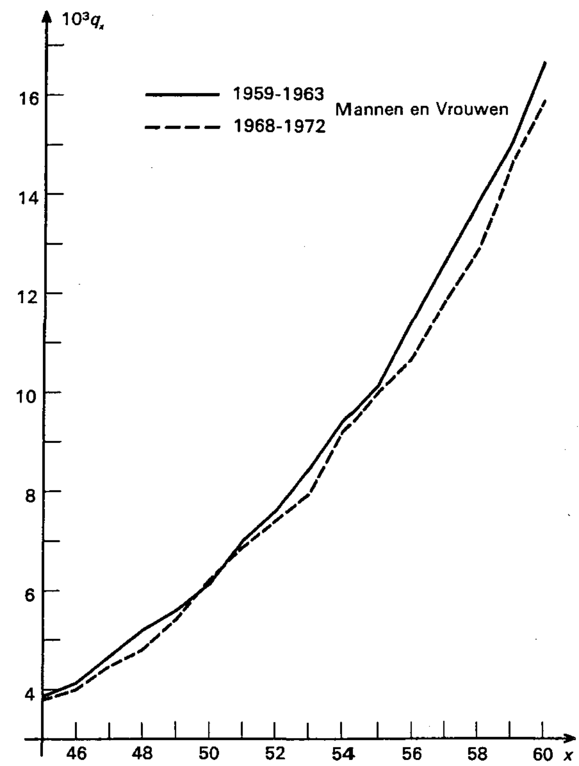
GRAFIEK 16.



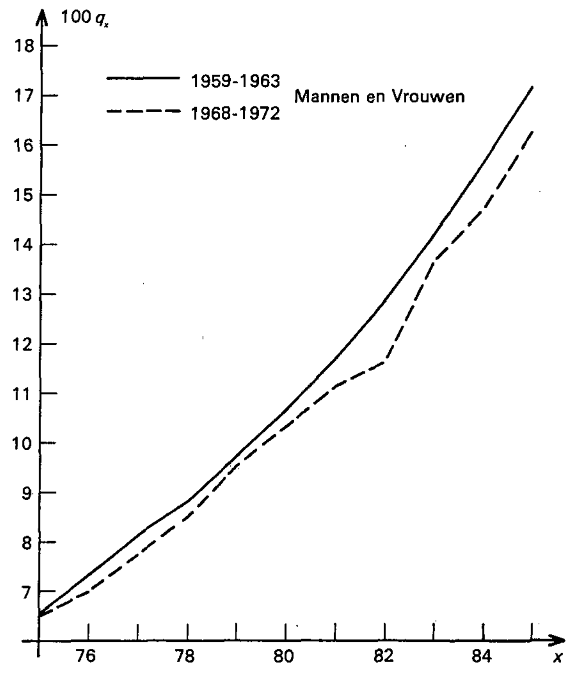
GRAFIEK 17.



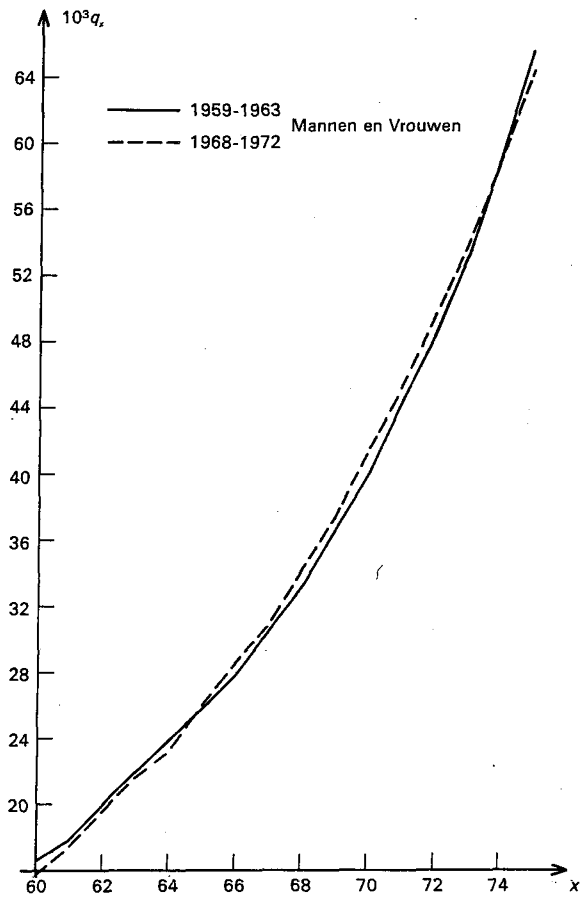
GRAFIEK 18.



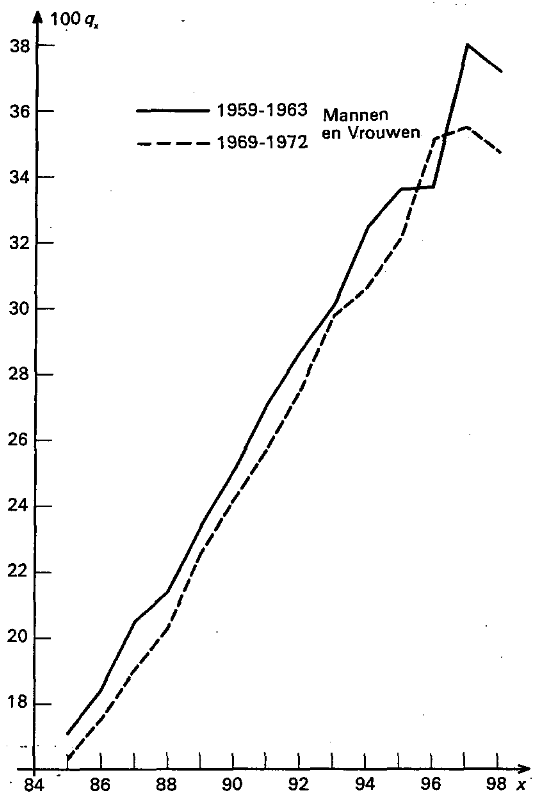
GRAFIEK 20.



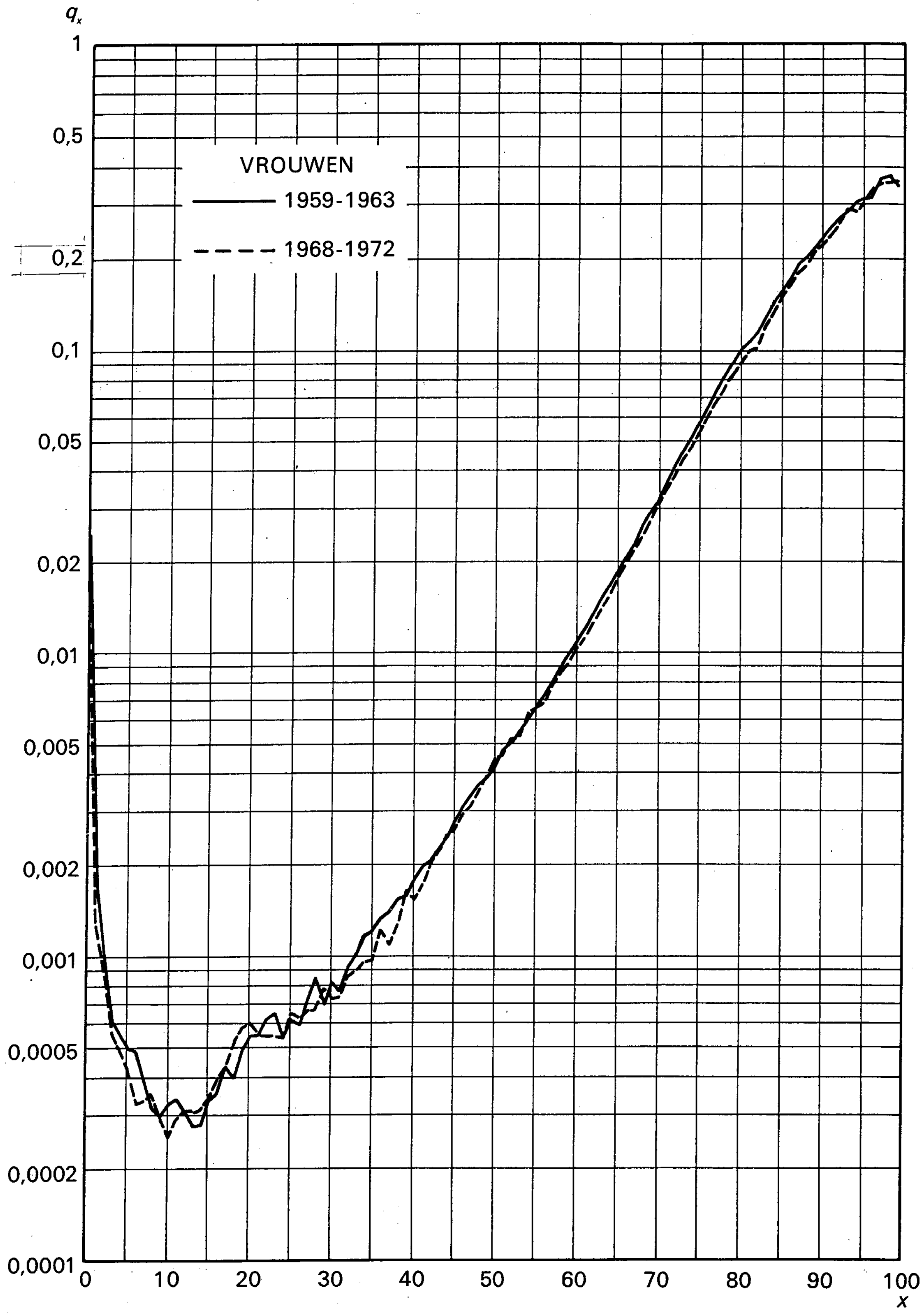
GRAFIEK 19.



GRAFIEK 21.

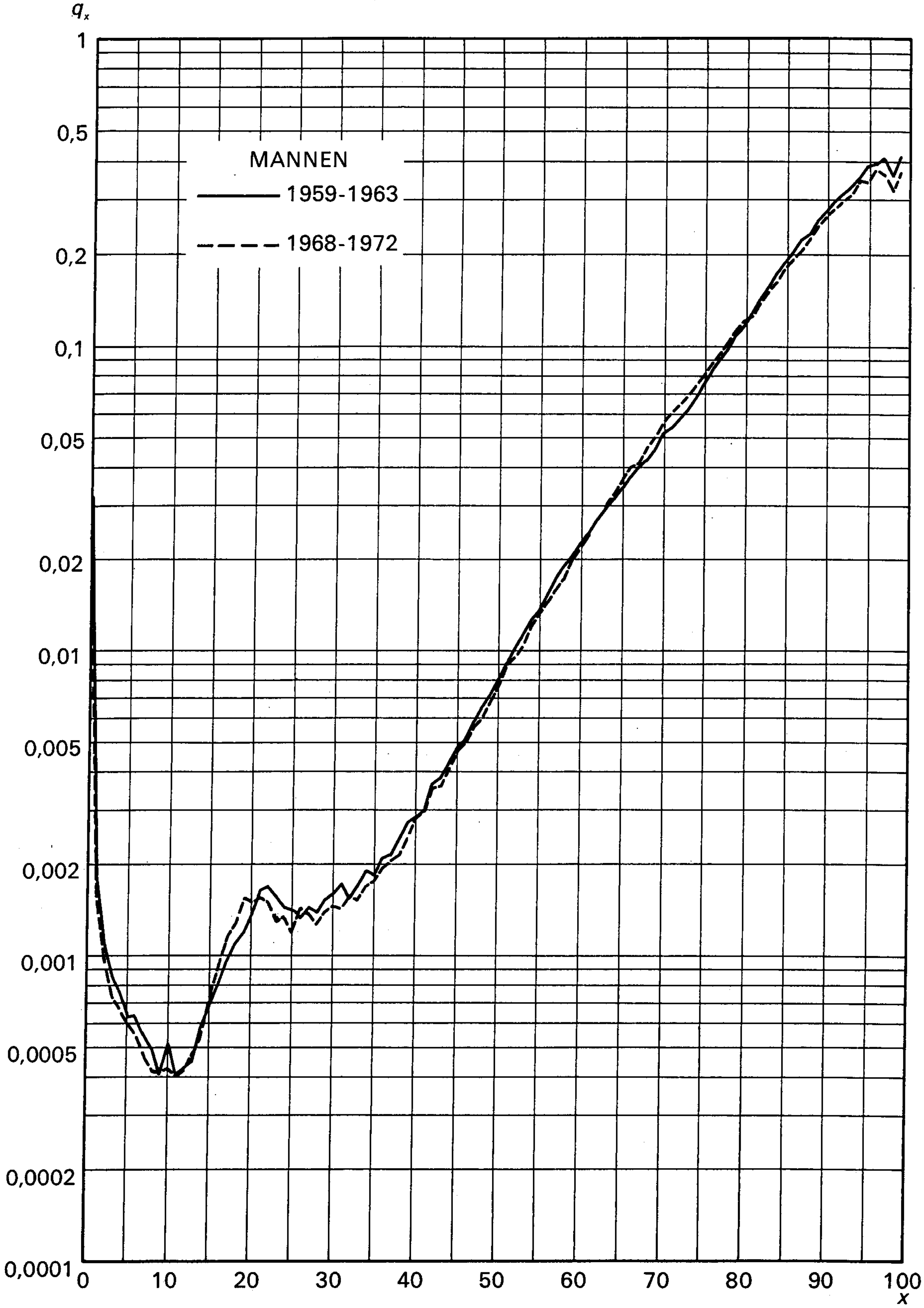


GRAFIEK 22.



q_x
1
0,5
0,2
0,1
0,05
0,02
0,01
0,005
0,002
0,001
0,0005
0,0002
0,0001
VROUWEN
1959-1963
1968-1972
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
x

GRAFIEK 23.



q_x
1
0,5
0,2
0,1
0,05
0,02
0,01
0,005
0,002
0,001
0,0005
0,0002
0,0001
MANNEN
1959-1963
1968-1972
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
x

Volgende vaststellingen kunnen uit tabel IV en de grafieken 1 tot 23 worden afgeleid :

A. Globaal gezien is de sterftekans tijdens de periode 1959-1972 gedaald, zij het evenwel in lichte mate : in België treedt een stagnatie op van de mortaliteit.

B. Plaatselijk en alleen voor het mannelijk geslacht doet zich het tegenovergestelde voor: de sterftekans van de mannelijke bevolking is immers gestegen voor de intervallen :

$$15 \leqslant x \leqslant 20$$
$$62 \leqslant x \leqslant 80.$$

C. Bij de geboorte is de sterftekans op één jaar sterk gedaald voor beide geslachten :

i — voor het vrouwelijk geslacht liep zij terug van 0.024 970 tot 0.017 632, dit is een vermindering van 29.4 %;

ii — voor het mannelijk geslacht liep de sterftekans terug van 0.032 430 tot 0.023 911, dit is een vermindering van 26.2 %.

Hoe opvallend deze daling ook is, men mag niet uit het oog verliezen dat België nog een zeer hoge kindersterfte telt in vergelijking met de vastgestelde kindersterfte in de naburige noorderlanden.

Ter illustratie, vindt men de sterftekans bij de geboorte voor enkele naburige landen van België (deze cijfers werden overgenomen uit het Demografisch Jaarboek van de U.N.O. - 1972).

Landen	q_0 Vrouwelijke bevolking	q_0 Mannelijke bevolking	q_0 Totale bevolking
Zweden (1971)	0.0099	0.0131	0.0115
Nederland (1971)	0.0101	0.0138	0.0120
Noorwegen (1970)	0.0104	0.0151	0.0128
België (1970)	0.0176	0.0239	0.0209

Tabel V geeft de waarden :

$$\frac{q_x \text{ (Mannen 1968-1972)}}{q_x \text{ (Vrouwen 1968-1972)}} \quad \frac{q_x \text{ (Mannen 1959-1963)}}{q_x \text{ (Vrouwen 1959-1963)}},$$

voor $0 \leqslant x \leqslant 99$.

Uit tabel V kan worden geconcludeerd dat de meersterfte bij de mannen plaatselijk nog is verergerd en met name in de intervallen 30-40 en 60-80.

b. *Evolutie van de verwachte levensduur op de leeftijd x.*

Tabel VI geeft, uitgedrukt in jaren, zowel voor de vrouwelijke als voor de mannelijke bevolking :

— de verwachte levensduur op leeftijd x, berekend over de periode 1959-1963;
— de verwachte levensduur op leeftijd x, berekend over de periode 1968-1972;
— de waargenomen variatie.

Uit deze tabel kan het volgende worden geconcludeerd :

A. Voor de vrouwelijke bevolking :

— de verwachte levensduur bij de geboorte is met 1.17 jaar of 14 maanden gestegen;
— voor de leeftijden verschillend van nul en minder dan 65 jaar, is de verwachte levensduur met ongeveer een half jaar gestegen.

Over het geheel noteert men voor alle leeftijden een vooruitgang die evenwel niet erg belangrijk is.

B. Voor de mannelijke bevolking :

— de verwachte levensduur bij de geboorte is met 0.63 jaar of 7,5 maand gestegen;
— voor de leeftijden, verschillend van nul, is er bijna geen toename van de verwachte levensduur, behalve voor het interval 30-75, waar een achteruitgang van de verwachte levensduur wordt genoteerd die een maximum van ongeveer vier maand bereikt bij het interval 60-65.

Boven de 80 jaar, schijnen de bekomen cijfers te wijzen op een lichte verhoging van de verwachte levensduur. Aangezien de in dit interval voorkomende aantallen klein zijn, kan deze verhoging niet significant zijn.

Globaal gezien noteert men een achteruitgang van de verwachte levensduur.

Tabel V. — Verhouding van de sterftekansen van de mannelijke en de vrouwelijke bevolking op leeftijd *x*.

x	$\frac{q_x \text{ Mannen}}{q_x \text{ Vrouwen}}$	
	1968-1972	1959-1963
0	1.356	1.299
1	1.202	1.081
2	1.162	1.167
3	1.373	1.387
4	1.351	1.382
5	1.454	1.235
6	1.710	1.306
7	1.401	1.410
8	1.198	1.563
9	1.432	1.367
10	1.697	1.576
11	1.358	1.206
12	1.357	1.387
13	1.557	1.607
14	1.748	2.071
15	1.974	2.029
16	2.300	2.250
17	2.713	2.227
18	2.454	2.800
19	2.690	2.469
20	2.521	2.545
21	2.780	3.036
22	2.719	2.683
23	2.452	2.415
24	2.505	2.704
25	1.809	2.306
26	2.307	2.250
27	2.027	2.000
28	1.914	1.628
29	1.779	2.200
30	2.041	1.940
31	1.960	2.205
32	1.830	1.670
33	1.703	1.607
34	1.757	1.622
35	1.806	1.508
36	1.578	1.551
37	1.852	1.514
38	1.675	1.567
39	1.484	1.738
40	1.825	1.549
41	1.715	1.505
42	1.762	1.801
43	1.635	1.714
44	1.641	1.753
45	1.826	1.747
46	1.706	1.644
47	1.765	1.726
48	1.716	1.786
49	1.750	1.867
50	1.748	1.943
51	1.989	1.937
52	1.847	2.056
53	2.047	2.076
54	1.926	2.113
55	2.062	2.057
56	2.114	2.136
57	2.056	2.163
58	2.033	2.172
59	2.172	2.102
60	2.146	2.093
61	2.184	2.041
62	2.139	2.007
63	2.148	1.988
64	2.117	1.893
65	2.052	1.869
66	2.087	1.796
67	1.953	1.779
68	1.967	1.645
69	1.900	1.606
70	1.825	1.624
71	1.756	1.469
72	1.717	1.430
73	1.611	1.366
74	1.589	1.380
75	1.532	1.355
76	1.497	1.341
77	1.419	1.290
78	1.400	1.241
79	1.336	1.244
80	1.324	1.203
81	1.267	1.214
82	1.384	1.243
83	1.208	1.221
84	1.208	1.205
85	1.187	1.195
86	1.171	1.163
87	1.137	1.165
88	1.173	1.146
89	1.167	1.189
90	1.174	1.150
91	1.130	1.144
92	1.125	1.135
93	1.071	1.131
94	1.225	1.153
95	1.096	1.240
96	1.097	1.239
97	1.027	1.109
98	0.892	0.953
99	1.026	1.199

Tabel VI. — Evolutie van de verwachte levensduur op leeftijd x.

x	$\mathring{e}_x$ Vrouwen 1959-1963	$\mathring{e}_x$ Vrouwen 1968-1972	Verschil	x	$\mathring{e}_x$ Mannen 1959-1963	$\mathring{e}_x$ Mannen 1968-1972	Verschil	x
0	73.04	74.21	1.17	0	67.16	67.79	0.63	0
1	73.90	74.53	0.63	1	68.39	68.44	0.05	1
2	73.03	73.63	0.60	2	67.52	67.55	0.03	2
3	72.10	72.69	0.59	3	66.59	66.61	0.02	3
4	71.14	71.73	0.59	4	65.65	65.66	0.01	4
5	70.18	70.77	0.59	5	64.70	64.71	0.01	5
6	69.22	69.79	0.57	6	63.74	63.75	0.01	6
7	68.25	68.82	0.57	7	62.78	62.78	0.00	7
8	67.28	67.84	0.56	8	61.82	61.81	−0.01	8
9	66.30	66.86	0.56	9	60.85	60.84	−0.01	9
10	65.32	65.88	0.56	10	59.87	59.86	−0.01	10
11	64.34	64.90	0.56	11	58.90	58.89	−0.01	11
12	63.36	63.92	0.56	12	57.93	57.91	−0.02	12
13	62.38	62.94	0.56	13	56.95	56.94	−0.01	13
14	61.40	61.96	0.56	14	55.98	55.96	−0.02	14
15	60.41	60.98	0.57	15	55.01	54.99	−0.02	15
16	59.43	60.00	0.57	16	54.05	54.03	−0.02	16
17	58.46	59.02	0.56	17	53.09	53.08	−0.01	17
18	57.48	58.05	0.57	18	52.14	52.14	0.00	18
19	56.50	57.08	0.58	19	51.20	51.21	0.01	19
20	55.53	56.11	0.58	20	50.26	50.29	0.03	20
21	54.56	55.15	0.59	21	49.33	49.36	0.03	21
22	53.59	54.18	0.59	22	48.41	48.44	0.03	22
23	52.63	53.21	0.58	23	47.49	47.51	0.02	23
24	51.66	52.23	0.57	24	46.57	46.57	0.00	24
25	50.69	51.26	0.57	25	45.63	45.64	0.01	25
26	49.72	50.30	0.58	26	44.70	44.69	0.01	26
27	48.75	49.33	0.58	27	43.76	43.76	0.00	27
28	47.78	48.36	0.58	28	42.82	42.82	0.00	28
29	46.82	47.39	0.57	29	41.88	41.87	−0.01	29
30	45.86	46.43	0.57	30	40.94	40.93	−0.01	30
31	44.89	45.46	0.57	31	40.01	39.99	−0.02	31
32	43.93	44.50	0.57	32	39.08	39.05	−0.03	32
33	42.97	43.53	0.56	33	38.14	38.11	−0.03	33
34	42.01	42.57	0.56	34	37.20	37.17	−0.03	34
35	41.06	41.61	0.55	35	36.27	36.23	−0.04	35
36	40.11	40.65	0.54	36	35.34	35.29	−0.05	36
37	39.17	39.71	0.54	37	34.41	34.36	−0.05	37
38	38.22	38.75	0.53	38	33.49	33.43	−0.06	38
39	37.28	37.80	0.52	39	32.57	32.50	−0.07	39
40	36.34	36.86	0.52	40	31.66	31.58	−0.08	40
41	35.41	35.92	0.51	41	30.75	30.67	−0.08	41
42	34.48	34.98	0.50	42	29.84	29.76	−0.08	42
43	33.55	34.05	0.50	43	28.95	28.87	−0.08	43
44	32.62	33.13	0.51	44	28.06	27.97	−0.09	44
45	31.70	32.21	0.51	45	27.18	27.08	−0.10	45
46	30.79	31.29	0.50	46	26.31	26.21	−0.10	46
47	29.89	30.38	0.49	47	25.44	25.34	−0.10	47
48	28.99	29.48	0.49	48	24.59	24.49	−0.10	48
49	28.09	28.58	0.49	49	23.75	23.63	−0.12	49
50	27.20	27.69	0.49	50	22.93	22.79	−0.14	50
51	26.31	26.82	0.51	51	22.11	21.97	−0.14	51
52	25.44	25.94	0.50	52	21.31	21.17	−0.14	52
53	24.56	25.07	0.51	53	20.53	20.37	−0.16	53
54	23.70	24.20	0.50	54	19.76	19.59	−0.17	54
55	22.84	23.35	0.51	55	19.01	18.82	−0.19	55
56	21.99	22.51	0.52	56	18.27	18.08	−0.19	56

x	$\mathring{e}_x$ Vrouwen 1959-1963	$\mathring{e}_x$ Vrouwen 1968-1972	Verschil	x	$\mathring{e}_x$ Mannen 1959-1963	$\mathring{e}_x$ Mannen 1968-1972	Verschil	x
57	21.15	21.66	0.51	57	17.56	17.34	−0.22	57
58	20.32	20.83	0.51	58	16.86	16.61	−0.25	58
59	19.50	20.00	0.50	59	16.18	15.90	−0.28	59
60	18.69	19.19	0.50	60	15.52	15.22	−0.30	60
61	17.89	18.38	0.49	61	14.87	14.55	−0.32	61
62	17.10	17.58	0.48	62	14.23	13.91	−0.32	62
63	16.33	16.81	0.48	63	13.62	13.28	−0.34	63
64	15.57	16.04	0.47	64	13.03	12.69	−0.34	64
65	14.83	15.29	0.46	65	12.44	12.10	−0.34	65
66	14.11	14.55	0.44	66	11.87	11.53	−0.34	66
67	13.39	13.83	0.44	67	11.31	11.00	−0.31	67
68	12.69	13.12	0.43	68	10.77	10.46	−0.31	68
69	12.02	12.44	0.42	69	10.22	9.96	−0.26	69
70	11.36	11.77	0.41	70	9.70	9.47	−0.23	70
71	10.72	11.12	0.40	71	9.20	9.00	−0.20	71
72	10.11	10.50	0.39	72	8.69	8.54	−0.15	72
73	9.52	9.90	0.38	73	8.21	8.11	−0.10	73
74	8.96	9.32	0.36	74	7.72	7.68	−0.04	74
75	8.41	8.76	0.35	75	7.27	7.26	−0.01	75
76	7.88	8.23	0.35	76	6.83	6.87	0.04	76
77	7.39	7.71	0.32	77	6.43	6.48	0.05	77
78	6.93	7.23	0.30	78	6.04	6.11	0.07	78
79	6.49	6.76	0.27	79	5.65	5.75	0.10	79
80	6.07	6.33	0.26	80	5.29	5.41	0.12	80
81	5.68	5.93	0.25	81	4.93	5.10	0.17	81
82	5.30	5.54	0.24	82	4.59	4.77	0.18	82
83	4.93	5.11	0.18	83	4.29	4.47	0.18	83
84	4.60	4.78	0.18	84	4.01	4.19	0.18	84
85	4.30	4.46	0.16	85	3.75	3.92	0.17	85
86	4.01	4.17	0.16	86	3.52	3.68	0.16	86
87	3.75	3.89	0.14	87	3.28	3.44	0.16	87
88	3.53	3.64	0.11	88	3.08	3.21	0.13	88
89	3.30	3.39	0.09	89	2.87	2.99	0.12	89
90	3.08	3.18	0.10	90	2.70	2.82	0.12	90
91	2.89	2.97	0.08	91	2.53	2.67	0.14	91
92	2.72	2.78	0.06	92	2.37	2.51	0.14	92
93	2.56	2.60	0.04	93	2.22	2.36	0.14	93
94	2.40	2.46	0.06	94	2.06	2.20	0.14	94
95	2.25	2.24	−0.01	95	1.92	2.12	0.20	95
96	2.06	2.03	−0.03	96	1.83	1.96	0.13	96
97	1.78	1.83	0.05	97	1.69	1.84	0.15	97
98	1.53	1.55	0.02	98	1.52	1.61	0.09	98
99	1.16	1.14	−0.02	99	1.09	1.13	0.04	99

c. *Conclusies.*

De verschillende vaststellingen die in de loop van deze studie werden gedaan, worden hierna samengevat.

i — Globaal is de sterftekans verminderd over de periode 1959-1972. Deze vermindering is vrij gering.

Voor de mannelijke bevolking tussen 15 en 20, en tussen 62 en 80 jaar gebeurt het tegenovergestelde.

ii — De kindersterfte is fel verminderd. Toch blijven deze cijfers relatief hoog in vergelijking met sommige naburige landen.

iii — De meersterfte bij de mannen blijft aanhouden; zij verergerde nog voor de leeftijdsintervallen 30-40 en 60-80.

iv — De verwachte levensduur bij de geboorte nam toe met 14 maanden voor de vrouwelijke en met 7 maanden voor de mannelijke bevolking.

De vrouwen boeken een vooruitgang op elke leeftijd. Hij is evenwel niet zeer belangrijk.

Bij de mannelijke bevolking is er voor de leeftijden verschillend van nul praktisch geen toename van de verwachte levensduur, voor het interval 30-75 is er zelfs een daling en vooral dan tussen 60-65 jaar.

*

Alles schijnt erop te wijzen dat, met de huidige stand van de medische wetenschap en de thans geldende levenswijze en levensvoorwaarden, men globaal staat voor een stabilisatie van de sterfte en voor belangrijke leeftijdsgroepen van de mannelijke bevolking zelfs voor een verslechtering.

* * *

II. Afronding voor actuarieel gebruik van de bruto-sterftetafels 1968-1972

1. — Inleiding.

Bij de publikatie van de bruto sterftetafels voor de periode 1968-1972, kan het interessant zijn daarbijhorende afgeronde sterftetafels, voor actuariëel gebruik, te publiceren.

In wat volgt worden volgende afgeronde sterftetafels opgesteld en besproken :

— HS (1968-1972) : afgeronde tafel voor de mannelijke bevolking, volgens één enkele wet van Makeham.
— HD (1968-1972) : afgeronde tafel voor de mannelijke bevolking, volgens twee wetten van Makeham.
— HFR (1968-1972) : afgeronde tafel voor de totale bevolking, volgens één enkele wet van Makeham.

De eerste twee tafels (HS en HD) worden voorop-gesteld voor verrichtingen bij overlijden, de laatste (HFR), voor de verrichtingen bij leven.

* * *

2. — Principes van de afronding.

a. *Keuze van de bruto-tafels.*

Opdat een afgeronde tafel zou kunnen gebruikt worden voor actuariële doeleinden dient de brutotafel voldoende representatief te zijn voor de sterfte van de verzekerden en mag de afronding de karakteristieken der brutotafel niet vervormen.

Aldus stellen zich twee voorname keuzen :

— sterftetafels gesteund op de totale bevolking.
— sterftetafels steunende op de ervaring van de verzekeringsmaatschappijen.

De laatstgenoemde tafels zijn zeer goed als kontrolemiddel. Voor het opstellen echter van tarieven en wiskundige reserves blijven ze minder geschikt. Inderdaad het totaal aantal verzekerden, en a fortiori het aantal sterfgevallen bij iedere leeftijd is te klein met het gevolg dat belangrijke afwijkingen zouden optreden. Men zou dit euvel kunnen vermijden door het groeperen der waarnemingen van meerdere maatschappijen en over verschillende jaren. Maar deze techniek zou kunnen voor gevolg hebben dat het monster heterogeen wordt en dat het een eventuele evolutie van de sterfte niet zou weergeven.

De tafels steunende op de totale bevolking daarentegen bieden het voordeel gebaseerd te zijn op een groot aantal. Bovendien heeft de vulgarisatie van de levensverzekering ertoe bijgedragen dat de totale bevolking kan worden benaderd door het aantal verzekerden.

Belangrijke verschillen tussen beide tafels zijn in sommige gevallen niet onoverkomelijk, voor zover natuurlijk de motieven alsook de maatstaven van deze verschillen kunnen gevonden worden. Dit laat toe de bruto-tafel vóór afronding op adekwate manier te wijzigen.

Het bestaan binnen dezelfde onderneming van zeer verschillende verrichtingen, rechtvaardigt het gebruik van minstens twee sterftetafels. Deze verrichtingen kunnen ingedeeld worden in twee hoofdgroepen :

— verrichtingen bij overlijden dit wil zeggen verrichtingen waarbij de netto-premies in de zelfde zin variëren als de sterfte der verzekerden.
— verrichtingen bij leven welke de omgekeerde karakteristiek vertonen van de verrichtingen bij overlijden.

Merken we nochtans op dat een verrichting tot een verschillende categorie kan behoren naargelang de tijdsintervallen of nog naargelang de verschillende verzekerden waarvoor de verrichting is opgevat.

Deze laatste beschouwingen kunnen pleiten voor het gebruik van meerdere sterftetafels voor eenzelfde verzekerde ofwel voor verschillende tafels voor iedere verzekerde en dit terzelfdertijd in een zelfde operatie (1).

*

Er werd vastgesteld dat over 't algemeen, in hoofdzaak omwille van antiselectie, de sterfte van de verzekerden bij leven lager is dan deze van de verzekerden bij overlijden.

Een gevoelig verschil wordt waargenomen bij hogere leeftijden.

(1) Herinneren wij eraan dat niet de tafel maar wel de sterftewet gevolgd door de verzekerde(n) samen met kapitalisatiefaktor bepalend zijn voor de actuele waarde van een *levensverrichting*. De sterftetafel is slechts een tabel waaruit men eenduidig de sterftewet kan afleiden, na het aannemen van zekere hypothesen. Door deze hypothesen te wijzigen kan men evengoed een enkele wet verkrijgen uit verschillende tafels als wel een reeks wetten uit één enkele tafel.

Een sterftetafel die voldoende zekerheid biedt voor een categorie van verrichtingen wordt bijgevolg onvoldoende en zelfs gevaarlijk voor de andere categorie.

Dit is de reden waarom minstens twee tafels (één per categorie verrichtingen) worden gebruikt.

* * *

b. *Keuze van de afronding.*

Theoretisch zou men de bruto-tafels kunnen gebruiken voor actuariële berekeningen. Nochtans zou dit aanleiding geven tot vele schommelingen in de actuariële funkties. Deze schommelingen zouden des te erger zijn indien ze veroorzaakt worden door toevallige afwijkingen.

Onder de vele afrondingsprocédés hebben we hier gekozen voor de analytische afronding van Makeham. Het aantal overlevenden op leeftijd x wordt in dit geval gegeven door :

$$l_x = l_{x_0} \, s^{x-x_0} \, g^{c^x - c^{x_0}}$$

$$x_0 \leqslant x \leqslant \Omega : l_\Omega = 0,$$

Hierin stellen s, g en c de karakteristieke constanten van deze wet voor. x_0 is de gekozen beginwaarde voor de afronding.

Het grote voordeel van de afronding volgens Makeham ligt in het gemakkelijk gebruik ervan. Daarom wordt van deze wet, geheel of gedeeltelijk, gebruik gemaakt in de meeste afrondingen bestemd voor actuariële doeleinden.

De afronding volgens Makeham vertoont nochtans ook enkele gebreken :

— in de eerste plaats past deze wet niet bij de extreme leeftijden van de tabel (2).

— vervolgens, ook in het interval waar de wet aanvaardbaar blijkt, is het nog altijd een benadering voor een werkelijke mortaliteitswet die te complex is om te passen in een bepaald schema, hoe ingewikkeld het ook mag wezen.

* * *

c. *Regelmatigheids-, veiligheids-, en gunstige compensatievoorwaarden.* (3)

i — De veiligheidsmarge welke men hoopt te verkrijgen op de sterfte dient voldoende groot te zijn door keuze van de bruto-tafel, door bijvoeging van expliciete kosten en door selectie (medisch) van de verzekerden, zodat het niet meer nodig is een systematische bijkomende afwijking bij de afronding in te voeren wat trouwens voor gevolg zou hebben dat men de actuaris een vals beeld zou ophangen van de verhouding tussen de verwachte- en de vastgestelde sterfte.

De waarden van de bruto sterftekansen en van de afgeronde waarden moeten zo dicht mogelijk bij elkaar liggen. Daartoe moeten, in de intervallen waar de afwijkingen het zelfde teken hebben zowel deze afwijkingen als de amplitude van deze intervallen minimaal gehouden worden. Dit noemt men de regelmatigheidsvoorwaarde, welke samengaat met de statistische optimisatie.

ii — Twee afwijkingen, met gelijke absolute waarde maar met tegengesteld teken, tussen een bruto- en een afgeronde waarde kan men niet als equivalent beschouwen. Zelfs als men abstractie maakt van de invloeden van een ondertarifiëring op de solvabiliteit van een onderneming, dit om redenen die hoger werden vermeld, blijft het niettemin waar dat bij netto bewerkingen ev. de verliezen geleden door ondersterfte gelijk aan $-a$ ten opzichte van de winsten door oversterfte gelijk aan $+a$ in de verhouding staan :

$$\frac{1 + ab}{1 - ab},$$

Hierin is b een positief getal, groter of gelijk aan de eenheid. Dit getal hangt af van de strategie aangenomen door de verzekeraar ten opzichte van de tarifiëring.

Het komt dus voor dat men rekening houdt met een zekere voorkeur voor afwijkingen die een gunstige veiligheidsmarge opleveren.

Dit noemen we de „veiligheidsvoorwaarde", niet te verwarren met het zoeken van een zekere veiligheidsmarge.

iii — Bij gebrek aan nauwkeurige waarden voor b zoekt men een compromis tussen de regelmatigheidsvoorwaarden en de veiligheidsvoorwaarden. Deze zijn klaarblijkelijk contradictorisch.

(2) Nochtans, rekening houdende met het bedrag der risico dragende kapitalen alsook met de aard van deze combinaties, slaande op deze leeftijden, mag men deze wet als aanvaardbaar aannemen indien het gewogen gemiddelde afgeronde sterftekansen (wegingsfactor is het risico dragend kapitaal) in grootteorde overeenstemt met de bruto-sterftekansen.

(3) Zie „*Omtrent de afronding van een sterftetafel volgens het schema van Makeham*" – Y. BALLEGEER en J.P. ANDRE-DUMONT, Statistisch Tijdschrift, Dec. 1974.

In de mate van het mogelijke opteert men voor de afwijkingen waar de risicokapitalen grootst zijn in absolute waarde.

Dit noemt men dan „gunstige compensatie".

Op enkele uitzonderingen na, waaronder onmiddellijk ingaande lijfrenten, hebben de verzekeringscombinaties een risicokapitaal dat afneemt met de tijd. Aldus, indien men een periodieke premie veronderstelt, verandert het risicokapitaal in het geval van gemengde verzekering met kapitaal C, van de waarde C (bij het begin) tot nul (op het einde). In het geval van verzekering met uitgesteld kapitaal daarentegen varieert het risicokapitaal van waarde nul tot C.

De „gunstige compensatie" tracht bijgevolg over het algemeen de waarde $\frac{\mu'_x}{\mu_x}$ te verminderen althans in het eerste deel van de tafel; dit geldt zowel voor het geval bij overlijden als bij leven.

* * *

d. *Rol van de Makehamse konstanten.*

In het schema van Makeham wordt de ogenblikkelijke sterftekans gegeven door:

$$\mu_x = -\ln s \quad c^x \ln g (\ln c), \text{ waarin:}$$

$$0 < s < 1$$

$$0 < g < 1$$

$$c > 1$$

Zij:

$X_0 \geqslant 0$, de beginleeftijd van de afronding.

$X_w \leqslant \Omega : l_\Omega = 0$, de eindleeftijd van de afronding.

x_1, x_2, x_3 gehele getallen zodanig dat:

$$X_0 \leqslant x_1 \leqslant X_0 + \frac{X_w - X_0}{3}$$

$$X_0 + \frac{X_w - X_0}{3} \leqslant x_2 \leqslant X_0 + \frac{2(X_w - X_0)}{3}$$

$$X_0 + \frac{2(X_w - X_0)}{3} \leqslant x_3 \leqslant X_w$$

$$x_3 - x_2 = x_2 - x_1.$$

i — Laat men c naar oneindig streven en g naar 1, dan kan men aan μ_x een kromtestraal geven, zo klein als men wil, in een willekeurig punt x bijvoorbeeld gekozen in het interval (x_2, x_3).

Hieruit volgt dat $\frac{\mu_{x_3}}{\mu_{x_2}}$ willekeurig groot kan worden terwijl $\frac{\mu_{x_2}}{\mu_{x_1}}$ kleiner blijft dan een bepaalde waarde.

ii — Laat men c naar 1 en g naar 0 streven, dan kan men aan μ_x een willekeurig grote kromtestraal geven. De grafische voorstelling van μ_x benadert in dit geval een rechte.

Hieruit volgt dat $\mu_{x_2} - \mu_{x_1}$ willekeurig groot kan worden indien s naar 1 streeft en dit zonder dat de verhouding $\frac{\mu_{x_3} + \mu_{x_1}}{2\mu_{x_2}}$ een willekeurige vaste waarde groter dan 1 overschrijdt.

iii — Laat men c alsook g naar 1 streven dan streeft de grafische voorstelling van μ_x naar een rechte evenwijdig met de as $0x$. Hieruit volgt dat $\mu_{x_2} - \mu_{x_1}$ alsook $\mu_{x_3} - \mu_{x_2}$ willekeurig klein kunnen worden zonder dat μ_{x_1} kleiner is dan een bepaalde waarde.

iv — De relatieve invloed van c in de uitdrukking van μ_x stijgt met de leeftijd; deze van s daarentegen daalt; deze van g stijgt eerst ten nadele van de invloed van s, vervolgens neemt ze af ten voordele van de invloed van c.

v — Geeft men c een aangroei Δc terwijl μ_{x_1} en μ_{x_3} constant blijven, dan zijn de waarden $c + \Delta c$ $g + \Delta g$, $s + \Delta s$ die voortspruiten uit deze voorwaarden (voor zover ze in overeenstemming blijven met de gebieden van s, g, c) van die aard dat μ_x in de tegengestelde zin varieert van Δc voor $x_1 < x < x_3$, in dezelfde zin voor $x > x_3$ en $x < x_1$.

Neemt men in de plaats van c, respectievelijk g of s als onafhankelijke veranderlijke, dan blijven de voorgaande conclusies respektievelijk bestaan in functie van de aangroei Δg of $\Delta(1 - s) \equiv - \Delta s$.

*

Deze eigenschappen laten toe terzelfdertijd te voldoen zowel aan de regelmatigheids-, de veiligheids- als de gunstige compensatievoorwaarde.

* * *

3. — Toepassing op de verrichtingen bij overlijden.

Conform met een bestaande gewoonte, heeft men de tafel van de totale mannelijke bevolking gekozen.

Die tafel vertoont een voldoende veiligheid zonder evenwel overdreven te zijn.

Die brutotafel kan onderverdeeld (4) worden in meerdere hoofddeelintervallen, aangeduid in de onderstaande tabel door een hoofdletter, alsook in tussengelegen intervallen, scharnieren genoemd en aangeduid door 2 letters die verwijzen naar de aangrenzende intervallen.

Interval	Bereik	Waarnemingen
A	0-11	Zone van de kinderleeftijd, met dalende sterftekans en niet af te ronden in het schema van Makeham.
AB	12-14	Scharnier tussen A en B.
B	15-33	Stijging van de jeugdsterfte en gelijkblijvende sterftekans in het deelinterval 18-31.
BC	34-35	Scharnier tussen B en C.
C	36-66	Centraal gedeelte van de sterftetafel met sterk stijgende sterftekans.
CD	67-70	Scharnier tussen C en D.
D	71-90	Laatste zone waar afronding mogelijk is, de aangroei der sterftekans is minder uitgesproken.
DE	91-94	Scharnier tussen D en E.
E	$\geqslant$ 95	Eindzone, niet af te ronden.

De variatie van de funktie $\frac{\mu'_x}{\mu_x}$ bij de overgang van C naar D laat slechts de volgende oplossingen toe:

— enige afronding, passend boven de 60 jaar, met grote oversterfte.

— enige afronding, passend tot 66 jaar met vanaf die leeftijd een grote oversterfte.

— enige afronding, met licht overschatte sterftekans tot 50 jaar, onderschatte sterftekans van 50 tot 75 jaar en verder overschatte sterftekans.

— dubbele afronding, de twee Makehamse wetten stemmen wat betreft de ogenblikkelijke waarde van de sterfte en het aantal overlevenden overeen in een punt van de scharnier CD.

*

Men heeft de twee laatste oplossingen weerhouden. De eerste hiervan gaf aanleiding tot de tafel: „Mannen enkelvoudig" als volgt genoteerd :

HS (1968-1972),

De tweede oplossing gaf de tabel „Mannen dubbel" met notatie:

HD (1968-1972).

*

Hoewel het beste overeenstemmingspunt (van de 2 afrondingen) voor wat betreft de kwaliteit van de afrondingen zich iets lager bevond, heeft men toch de leeftijd van 70 jaar aangenomen om praktische redenen.

Het gaat hier inderdaad om de eindleeftijd voor tijdelijke verrichtingen (dus andere dan deze op het volledige leven). Deze verrichtingen volgen dus ook

(4) Deze onderverdeling beantwoordt niet aan biometrische beschouwingen, maar is uitsluitend bedoeld voor analyse volgens de wet van Makeham.

gedurende hun volledige loop een sterftewet die beantwoordt aan een enkelvoudige afronding.

* * *

4. — Toepassing op de verrichtingen bij leven.

Voor jeugdige leeftijd is een overdreven zekerheid geenszins te verrechtvaardigen. Daarentegen zijn de meer bejaarde verzekerden over 't algemeen renteniers, die omwille van hun levenswijze en vanuit het oogpunt van hun antiselectie een speciaal sterfteverloop kenne. Een algemene sterftetafel is dus voldoende. Ook, beter dan beroep te doen op de bruto-sterftetafel voor de vrouwelijke bevolking, deze laat op verschillende punten te wensen over, heeft men hier gekozen voor de bruto-sterftetafel van de gehele bevolking. Daaraan heeft men echter een aantal correcties aangebracht die aldus het gebruik van een enkele tafel toelaten voor de verrichtingen bij leven.

*

De heer Jacques LOISEL merkte op (5) dat voor de meest voorkomende leeftijden waarop een lijfrente contract wordt onderschreven het effect van de antiselectie bij renteniers gelijkwaardig was met een onderschatte sterftekans van:

94,94 % het eerste jaar
84,94 % het tweede jaar
52,57 % het derde jaar
32,07 % het vierde jaar
1,32 % het vijfde jaar.

Wanneer men deze correcties onmiddellijk toepast vereist dit het opstellen van sterftetafels per beginleeftijd. Ook heeft men gevonden welke de correcties zijn per leeftijd, onafhankelijk van de leeftijd bij aanvang, maar die voor een interest van 5 % en een gegeven tafel [H(1959-63)M_k] gelijkwaardig zijn met de correcties van LOISEL voor wat betreft de operatie: „onmiddellijk ingaande lijfrente".

Indien $\ddot{a}_x$ en a_x de nettokoopsommen voorstellen van de prenumerando en postnumerando uitgestelde lijfrenten voor de niet gecorrigeerde tafel, terwijl $\ddot{a}'_x$ en a'_x gelijkaardige koopsommen voorstellen na toepassing van de correcties van LOISEL met beginleeftijd x, dan heeft men:

$$\theta_x = \frac{p_x}{q_x} \cdot \frac{a'_x \cdot \ddot{a}_{x+1} - a_x \cdot \ddot{a}'_{x+1}}{a_x \cdot \ddot{a}'_{x+1}},$$

(5) J. LOISEL. – „*Critères d'homogénéité des classes de risques des personnes conscientes de leur inassurabilité en assurance sur la vie*' – (B.A.R.A.B. n° 66 – 1971).

Hierin is θ_x de coëfficient van „onder-sterfte" toe te passen op de waarden van de jaarlijkse sterftekans q_x voor de betreffende tafel en dit onafhankelijk van een beginleeftijd ten einde de elementen $\ddot{a}'_x$ en a'_x, die wel van beginleeftijd afhangen, terug te vinden.

Het werd nodig geacht de gevonden waarden af te ronden daar de correctiecoëfficienten van LOISEL klaarblijkelijk overdreven zijn voor hoog bejaarde en jeugdige verzekerden.

De bruto θ_x werden dus afgerond met een tweedegraadsfunctie waarvan de tweede afgeleide positief is tot 75 jaar, negatief tot 84 jaar en met de volgende voorwaarden:

$$\theta_{59} = 0\,; \quad \theta_{84} = \theta_{85}\,; \quad \theta_{x \geqslant 85} \simeq 0{,}25$$

Aldus verkrijgt men de hiernavolgende tabel voor de bruto θ_x alsook de afgeronde θ_x.

x	θ_x bruto	θ_x afgerond
60	0.0360	0.0100
64	0.0642	0.0530
68	0.1006	0.1008
72	0.1486	0.1534
76	0.2034	0.2028
80	0.2652	0.2418
84	0.3338	0.2568

Deze afgeronde waarden, toegepast op de q_x waarden van de bruto-sterftetafel slaande op de volledige bevolking, geven de waarden van de sterftekans $q'_x = (1 - \theta_x)q_x$ van de gecorrigeerde brutotafel die werd uitgekozen voor de afronding.

De sterftetafel van de gehele bevolking, na aldus te zijn aangepast, vertoont gelijkaardige karakteristieken als de sterftetafel voor de totale mannelijke bevolking, temeer dat de correcties een benadrukken van de relatieve daling van de sterftekans bij hoge leeftijd voor gevolg hebben.

Gezien het hier gaat om een tafel bestemd voor verrichtingen bij leven is het in dit geval niet nodig te voorzien in een dubbele afronding (zoals bij de tafel bestemd voor verrichtingen bij overlijden).

Deze laatste kan aldus worden uitgeschreven:

x	q_x	q'_x	x	q_x	q'_x
< 60	$q_x = q'_x$		76	0.070287	0.056033
60	0.015897	0.015738	77	0.077535	0.060880
61	0.017472	0.017117	78	0.084538	0.065492
62	0.019708	0.019099	79	0.095106	0.072823
63	0.021739	0.020830	80	0.103184	0.078234
64	0.023343	0.022106	81	0.111628	0.083967
65	0.026019	0.024341	82	0.116173	0.086863
66	0.028939	0.026731	83	0.136814	0.101885
67	0.030915	0.028182	84	0.147324	0.109491
68	0.034295	0.030838	85	0.162740	0.120948
69	0.037562	0.033299	86	0.175353	0.130322
70	0.041522	0.036269	87	0.190522	0.141596
71	0.045088	0.038785	88	0.203812	0.151473
72	0.049556	0.041954	89	0.226246	0.168146
73	0.053823	0.044818	90	0.242442	0.180183
74	0.058866	0.048182	> 90	$q'_x = q_x \cdot 0{,}7432$	
75	0.064598	0.051937			

Een enkelvoudige afrondingsmethode werd hier dus gebruikt. Dit gaf ten slotte de afgeronde tafel (6) :

HFR (1968-1972).

* * *

5. — Resultaten.

a. *Methode van de „Kleinste kwadraten"* (7).

De opeenvolgende afrondingen in deze studie werden uitgevoegd steunende op de methode der kleinste kwadraten toegepast op de waarschijnlijkheid van overlijden op leeftijd x (7) :

$$q_x = 1 - sg^{c^x(c-1)}$$

De te minimaliseren som wordt als volgt uitgedrukt :

$$S = \sum_{x=A}^{x=B} p_x - sg^{c^x(c-1)} \quad {}^2$$

waar : $0 \leqslant A < B \leqslant \Omega : l_\Omega = 0.$

De noodzakelijke voorwaarden van een extremum zijn :

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{\partial S}{\partial g} = \frac{\partial S}{\partial c} = 0,$$

wat leidt tot een stelsel van normaalvergelijkingen :

$$F_1(s, g, c) = \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} g^{c^x(c-1)} - s\Sigma g^{2c^x(c-1)} = 0$$

$$F_2(s, g, c) =$$

$$\Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} c^x g^{c^x(c-1)-1} - s\Sigma c^x g^{2c^x(c-1)-1} = 0$$

$$F_3(s, g, c) = \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} g^{c^x(c-1)} c^{x-1} [(x+1)c - x]$$

$$- s\Sigma g^{2c^x(c-1)} c^{x-1} [(x+1)c - x] = 0$$

Dit niet lineaire stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden wordt opgelost door de iteratieve methode van NEWTON-RAPHSON.

De elementen van de Jacobiaanse matrix worden door middel van volgende formules berekend :

$$M(1,1) = \frac{\partial F_1}{\partial s} = -\Sigma g^{2c^x(c-1)}$$

$$M(1,2) = \frac{\partial F_1}{\partial g} = \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} c^x(c-1) g^{c^x(c-1)-1}$$

$$- 2s\Sigma c^x(c-1) g^{2c^x(c-1)-1}$$

$$M(1,3) = \frac{\partial F_1}{\partial c} =$$

$$(lng)\Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} g^{c^x(c-1)} [(x+1)c - x] c^{x-1}$$

$$- 2s(lng)\Sigma g^{2c^x(c-1)} \; c^{x-1} \; [(x+1)c - x]$$

(6) HFR betekent : Mannen-Vrouwen-Renten.
De schrijfwijze HF werd verkozen boven MF of MV om gelijkaardige notaties te verkrijgen als in de tafels van het KB van 30.9.1968.

(7) Zie : *„Optimale Makehamiaanse afrondingen in de zin der kleinste kwadraten van een sterftetafel in een gegeven leeftijdsinterval"* – Y. BALLEGEER – Statistisch Tijdschrift, Mei 1973.

$$M(2,1) = \frac{\partial F_2}{\partial s} = -\Sigma c^x g^{2c^x(c-1)-1}$$

$$M(2,2) = \frac{\partial F_2}{\partial g} = \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} c^x [(c-1)c^x - 1] g^{c^x(c-1)-2}$$

$$- s\Sigma c^x [2(c-1)c^x - 1] g^{2c^x(c-1)-2}$$

$$M(2,3) = \frac{\partial F_2}{\partial c} = \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} x c^{x-1} g^{c^x(c-1)-1}$$

$$+ (lng)\Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} c^{2x-1} g^{c^x(c-1)-1} [(x+1)c - x]$$

$$- s\Sigma x c^{x-1} g^{2c^x(c-1)-1}$$

$$- 2s(lng)\Sigma c^{2x-1} [(x+1)c - x] g^{2c^x(c-1)-1}$$

$$M(3,1) = \frac{\partial F_3}{\partial s} = -\Sigma g^{2c^x(c-1)} c^{x-1} [(x+1)c - x]$$

$$M(3,2) = \frac{\partial F_3}{\partial g} =$$

$$\Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} [(x+1)c - x] c^{2x-1} (c-1) g^{c^x(c-1)-1}$$

$$- 2s\Sigma c^{2x-1} [(x+1)c - x](c-1) g^{2c^x(c-1)-1}$$

$$M(3,3) = \frac{\partial F_3}{\partial c} =$$

$$(lng)\Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} c^{2(x-1)} [(x+1)c - x]^2 g^{c^x(c-1)}$$

$$- 2s(lng)\Sigma c^{2(x-1)} [(x+1)c - x]^2 g^{2c^x(c-1)}$$

$$+ \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} g^{c^x(c-1)} c^{x-2} [x(x+1)c - x(x-1)]$$

$$- s\Sigma g^{2c^x(c-1)} [x(x+1)c - x(x-1)] c^{x-2}$$

Opmerkingen.

1 — Naargelang de keuze in de paragrafen 5.b, 5.c en 5.d, kan het stelsel normaalvergelijkingen van de derde orde, zoals hiervoor beschreven, zich herleiden tot een niet lineair stelsel van tweede orde en soms tot één niet-lineaire vergelijking met één onbekende. De principiële oplossingsmethode voor deze stelsels blijft nochtans onveranderd.

2 — De iteratieve methode wordt niet verder vervolgd van zodra de grootste der afwijkingen $|s_{n+1} - s_n|$, $|g_{n+1} - g_n|$, $|c_{n+1} - d_n|$ kleiner wordt dan de waarde 10^{-12}.

3 — Supplementair vindt men de algemene principes die hebben geleid tot de afgeronde tafel (bijlage 1).

b. *De afgeronde tafel* HS(1968-1972).

α — Men zoekt het minimum van :

$$S = \sum_{x=15}^{x=70} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2.$$

Men vertrekt van de initiële waarden :

$$s_0 = 0.999\ 252$$
$$g_0 = 0.999\ 478$$
$$c_0 = 1.104\ 200 \ ,$$

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot volgende waarden :

$$s \equiv s_1 = 0.999\ 681\ 385\ 770$$
$$g \equiv g_1 = 0.999\ 466\ 603\ 646$$
$$c \equiv c_1 = 1.104\ 530\ 045\ 291.$$

β — Men zoekt het minimum van :

$$S = \sum_{x=15}^{x=35} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2$$

hierin worden g en c respektievelijk vastgehouden op de waarden g_1 en c_1.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot de waarde :

$$s \equiv s_2 = 0.999\ 407\ 845\ 556 \ .$$

γ — Men zoekt het minimum van :

$$S = \sum_{x=15}^{x=70} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2 \ ,$$

waarin s wordt vastgehouden op de waarde s_2.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot volgende waarden :

$$g \equiv g_2 = 0.999\ 534\ 389\ 625$$
$$c \equiv c_2 = 1.106\ 379\ 997\ 174 \ .$$

δ — Men zoekt het minimum van :

$$S = \sum_{x=15}^{x=77} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2 \ ,$$

waarin s en g worden vastgehouden op de waarden s_2 en g_2.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot de waarde:

$$c \equiv c_3 = 1.105 \quad 046 \quad 034 \quad 668$$

De afronding HS (1968-1972) wordt aldus volledig bepaald door de waarden:

$$s^* \equiv s_2 = 0.999 \quad 407 \quad 845 \quad 556$$

$$g^* \equiv g_2 = 0.999 \quad 534 \quad 389 \quad 625$$

$$c^* \equiv c_3 = 1.105 \quad 046 \quad 034 \quad 668$$

Tabel I geeft de tafel HS (1968-1972). De tabel is samengesteld uit 7 kolommen waarin respektievelijk:

x : leeftijd.

l_x : aantal overlevenden op leeftijd x ($l_0 = 10^6$).

d_x : aantal overlijdens op leeftijd x.

p_x : overlevingskans op leeftijd x.

s_x : sterftekans op leeftijd x.

μ_x : waarde van de onmiddellijke sterftekans op leeftijd x.

x : leeftijd.

Tabel I. De afgeronde tafel HS (1968-1972).

x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
0	1000000	641	0.999359	0.000641	0.000639	0
1	999359	646	0.999354	0.000646	0.000644	1
2	998713	651	0.999348	0.000652	0.000649	2
3	998062	657	0.999342	0.000658	0.000655	3
4	997405	663	0.999335	0.000665	0.000662	4
5	996742	671	0.999327	0.000673	0.000669	5
6	996071	678	0.999319	0.000681	0.000677	6
7	995393	687	0.999309	0.000691	0.000686	7
8	994706	698	0.999299	0.000701	0.000696	8
9	994008	708	0.999288	0.000712	0.000707	9
10	993300	720	0.999275	0.000725	0.000719	10
11	992580	733	0.999261	0.000739	0.000732	11
12	991847	748	0.999246	0.000754	0.000747	12
13	991099	764	0.999229	0.000771	0.000763	13
14	990335	783	0.999210	0.000790	0.000781	14
15	989552	802	0.999189	0.000811	0.000800	15
16	988750	825	0.999166	0.000834	0.000822	16
17	987925	849	0.999141	0.000859	0.000846	17
18	987076	876	0.999113	0.000887	0.000873	18
19	986200	905	0.999082	0.000918	0.000903	19
20	985295	939	0.999047	0.000953	0.000935	20
21	984356	975	0.999010	0.000990	0.000971	21
22	983381	1015	0.998968	0.001032	0.001011	22
23	982366	1059	0.998922	0.001078	0.001055	23
24	981307	1108	0.998870	0.001130	0.001104	24
25	980199	1163	0.998814	0.001186	0.001157	25
26	979036	1222	0.998752	0.001248	0.001217	26
27	977814	1288	0.998683	0.001317	0.001282	27
28	976526	1361	0.998607	0.001393	0.001355	28
29	975165	1440	0.998523	0.001477	0.001435	29
30	973725	1529	0.998430	0.001570	0.001524	30
31	972196	1627	0.998327	0.001673	0.001621	31
32	970569	1734	0.998213	0.001787	0.001729	32
33	968835	1852	0.998088	0.001912	0.001849	33
34	966983	1983	0.997949	0.002051	0.001981	34
35	965000	2127	0.997796	0.002204	0.002127	35
36	962873	2284	0.997627	0.002373	0.002288	36
37	960589	2459	0.997440	0.002560	0.002466	37
38	958130	2650	0.997234	0.002766	0.002663	38
39	955480	2861	0.997006	0.002994	0.002880	39
40	952619	3092	0.996754	0.003246	0.003121	40
41	949527	3347	0.996476	0.003524	0.003386	41
42	946180	3625	0.996168	0.003832	0.003680	42
43	942555	3932	0.995828	0.004172	0.004004	43

x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
44	938623	4268	0.995453	0.004547	0.004363	44
45	934355	4636	0.995039	0.004961	0.004759	45
46	929719	5039	0.994581	0.005419	0.005196	46
47	924680	5478	0.994075	0.005925	0.005680	47
48	919202	5960	0.993516	0.006484	0.006214	48
49	913242	6484	0.992900	0.007100	0.006805	49
50	906758	7056	0.992218	0.007782	0.007457	50
51	899702	7678	0.991466	0.008534	0.008179	51
52	892024	8354	0.990636	0.009364	0.008976	52
53	883670	9085	0.989719	0.010281	0.009856	53
54	874585	9877	0.988706	0.011294	0.010829	54
55	864708	10733	0.987589	0.012411	0.011905	55
56	853975	11652	0.986355	0.013645	0.013093	56
57	842323	12640	0.984994	0.015006	0.014406	57
58	829683	13696	0.983492	0.016508	0.015857	58
59	815987	14822	0.981835	0.018165	0.017461	59
60	801165	16018	0.980007	0.019993	0.019233	60
61	785147	17280	0.977991	0.022009	0.021191	61
62	767867	18607	0.975768	0.024232	0.023355	62
63	749260	19992	0.973318	0.026682	0.025746	63
64	729268	21428	0.970617	0.029383	0.028388	64
65	707840	22905	0.967641	0.032359	0.031308	65
66	684935	24409	0.964363	0.035637	0.034534	66
67	660526	25923	0.960754	0.039246	0.038100	67
68	634603	27427	0.956781	0.043219	0.042040	68
69	607176	28895	0.952410	0.047590	0.046394	69
70	578281	30300	0.947604	0.052396	0.051205	70
71	547981	31608	0.942320	0.057680	0.056522	71
72	516373	32781	0.936516	0.063484	0.062397	72
73	483592	33782	0.930143	0.069857	0.068889	73
74	449810	34567	0.923152	0.076848	0.076063	74
75	415243	35093	0.915487	0.084513	0.083991	75
76	380150	35320	0.907092	0.092908	0.092752	76
77	344830	35206	0.897903	0.102097	0.102433	77
78	309624	34722	0.887858	0.112142	0.113131	78
79	274902	33843	0.876888	0.123112	0.124953	79
80	241059	32562	0.864924	0.135076	0.138016	80
81	208497	30880	0.851892	0.148108	0.152452	81
82	177617	28823	0.837720	0.162280	0.168404	82
83	148794	26436	0.822333	0.177667	0.186032	83
84	122358	23779	0.805658	0.194342	0.205512	84
85	98579	20936	0.787625	0.212375	0.227038	85
86	77643	18000	0.768166	0.231834	0.250825	86
87	59643	15077	0.747222	0.252778	0.277111	87
88	44566	12267	0.724741	0.275259	0.306159	88
89	32299	9668	0.700685	0.299315	0.338257	89
90	22631	7354	0.675029	0.324971	0.373727	90
91	15277	5381	0.647770	0.352230	0.412924	91
92	9896	3771	0.618925	0.381075	0.456238	92
93	6125	2520	0.588542	0.411458	0.504101	93
94	3605	1598	0.556699	0.443301	0.556993	94
95	2007	956	0.523511	0.476489	0.615441	95
96	1051	537	0.489133	0.510867	0.680028	96
97	514	281	0.453764	0.546236	0.751400	97
98	233	136	0.417646	0.582354	0.830269	98
99	97	60	0.381068	0.618932	0.917424	99
100	37	24	0.344362	0.655638	1.013733	100
101	13	9	0.307899	0.692101	1.120159	101
102	4	3	0.272079	0.727921	1.237766	102
103	1	1	0.237322	0.762678	1.367726	103
104	0	0	0.204055	0.795945	1.511338	104

De grafieken 1 tot 6 illustreren de afronding in de volgende intervallen:

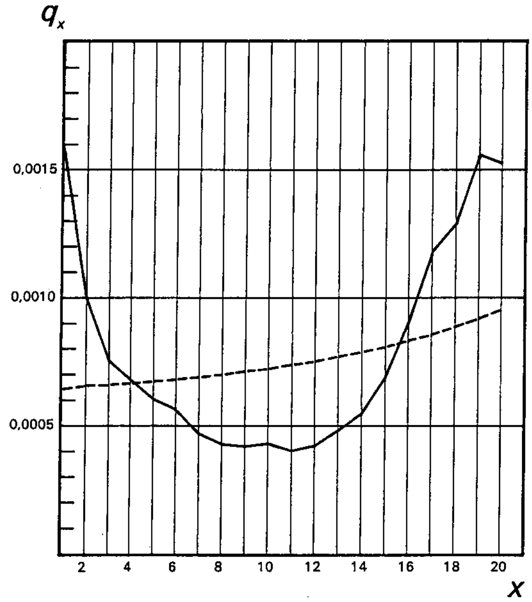
1 ⩽ x ⩽ 20 grafiek 1
21 ⩽ x ⩽ 40 grafiek 2
40 ⩽ x ⩽ 60 grafiek 3
60 ⩽ x ⩽ 80 grafiek 4
80 ⩽ x ⩽ 100 grafiek 5
0 ⩽ x ⩽ 99 grafiek 6
(semi-logaritmisch papier)

Iedere grafiek bezit 2 krommen:

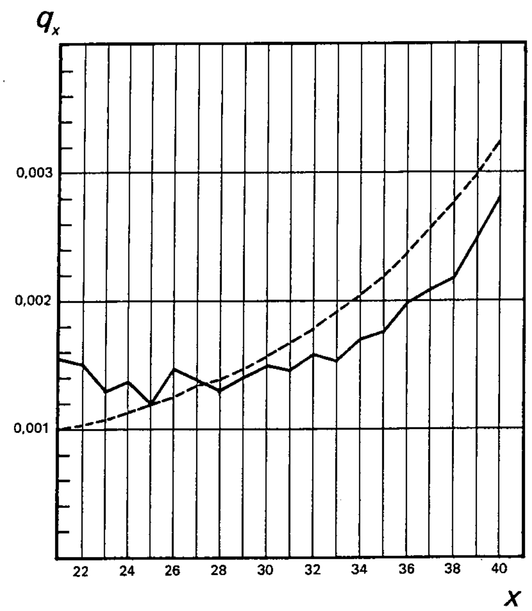
— deze in volle lijn geeft de bruto sterftekans op leeftijd x.

— deze in puntlijn geeft de afgeronde waarschijnlijkheid van overlijden op leeftijd x.

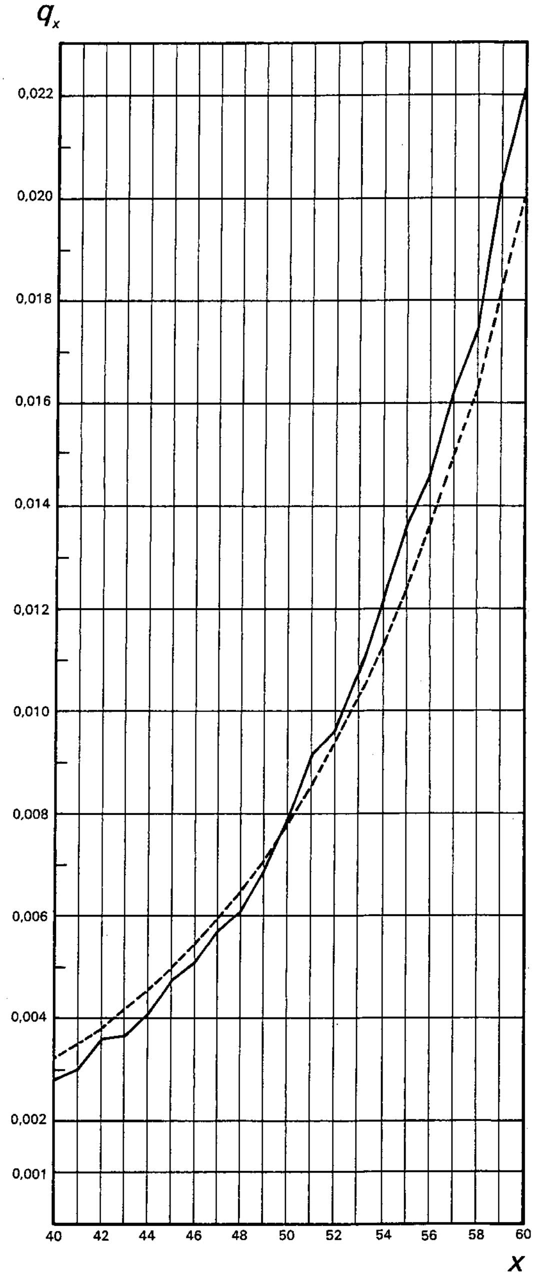
GRAFIEK 1.
HS



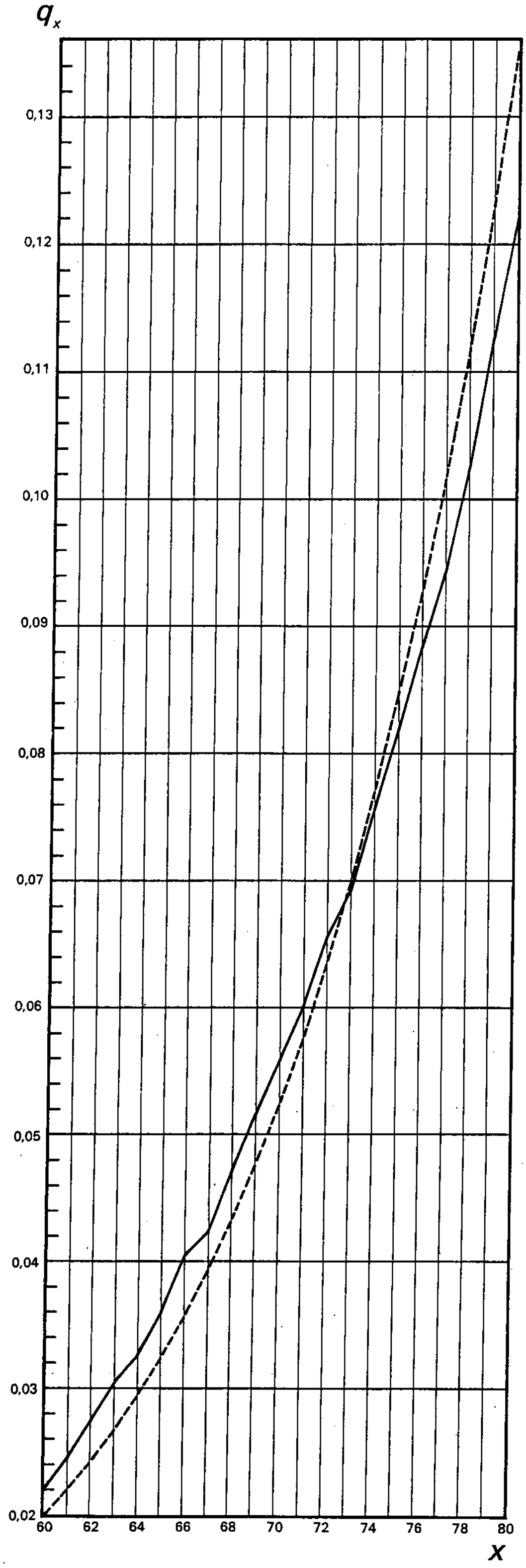
GRAFIEK 2.
HS



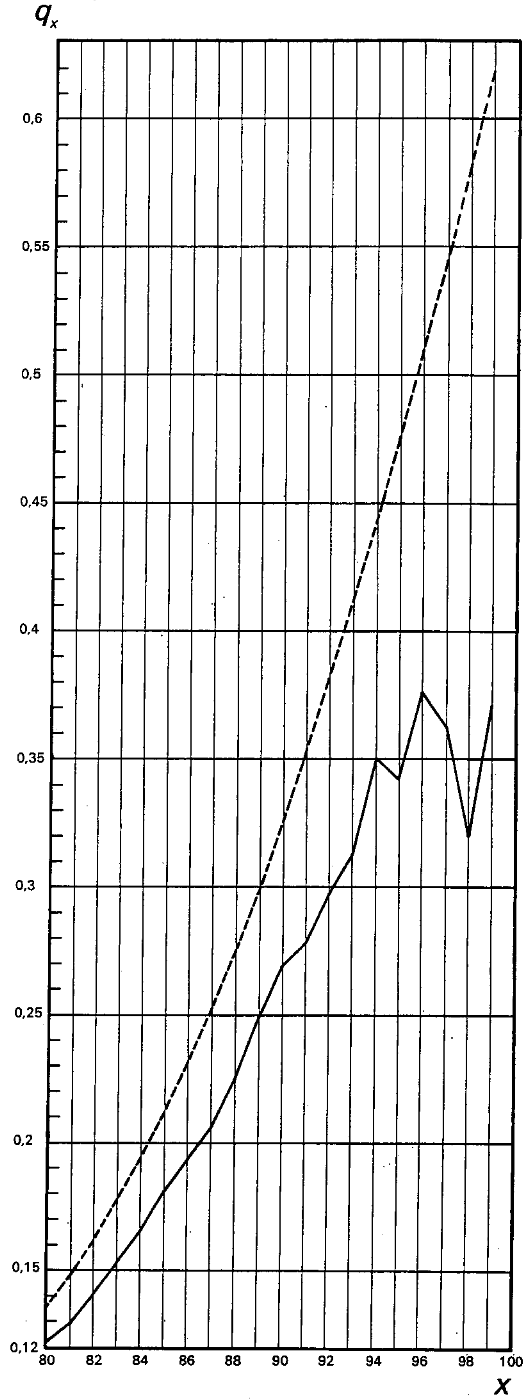
GRAFIEK 3.
HS



GRAFIEK 4.
HS

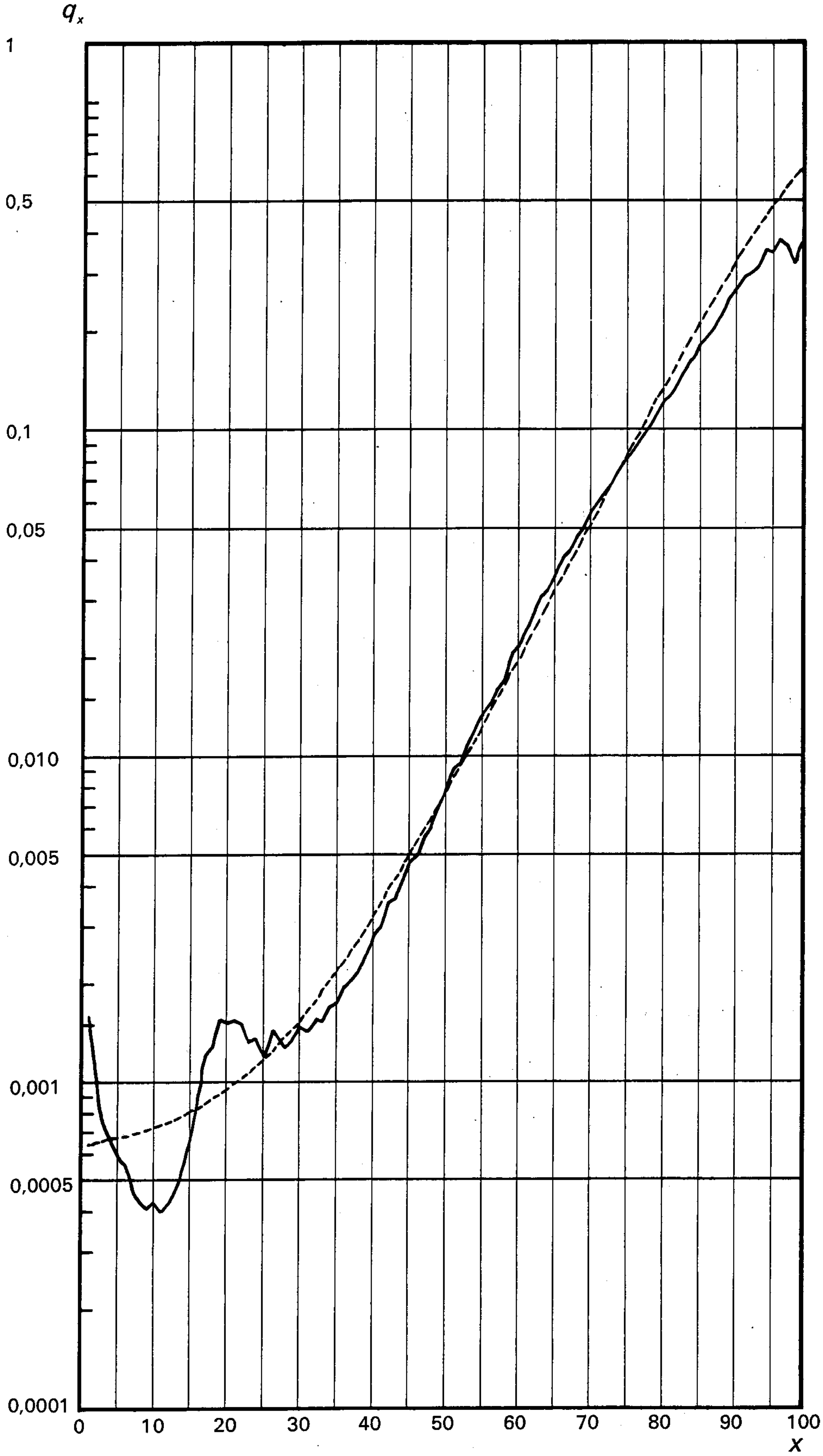


GRAFIEK 5.
HS



GRAFIEK 6.

HS


q_x
1
0,5
0,1
0,05
0,010
0,005
0,001
0,0005
0,0001
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
x

c. *De afgeronde tafel* HD (1968-1972).

De afgeronde tafel HD (1968-1972) bestaat uit twee delen:

$$\text{HD1}: 0 \leqslant x \leqslant 69; \quad \text{HD2}: x \geqslant 70.$$

i — Berekening van HD1 ($0 \leqslant x \leqslant 69$).

De afronding HD1 wordt in 4 opeenvolgende stappen berekend:

α — Men zoekt het minimum van

$$S = \sum_{x=15}^{x=66} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2$$

waar s de waarde $s \equiv s_1 = 0.999 \quad 585$ heeft.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot volgende waarden voor g en c:

$$g \equiv g_1 = 0.999 \quad 649 \quad 454 \quad 078$$

$$c \equiv c_1 = 1.111 \quad 199 \quad 547 \quad 061.$$

β — Men zoekt het minimum van

$$S = \sum_{x=15}^{x=33} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2$$

waar g en c respektievelijk de waarden g_1 en c_1 hebben.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot de waarde:

$$s \equiv s_1 = 0.999 \quad 222 \quad 173 \quad 465.$$

γ — Men zoekt het minimum van

$$S = \sum_{x=33}^{x=66} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2$$

waar s de waarde s_2 heeft.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot de waarden:

$$g \equiv g_2 = 0.999 \quad 751 \quad 696 \quad 667$$

$$c \equiv c_2 = 1.115 \quad 094 \quad 352 \quad 734.$$

δ — Men berekent het minimum van

$$S = \sum_{x=15}^{x=33} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2$$

g en c hebben hierin respektievelijk de waarden g_2 en c_2.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot de waarde:

$$s \equiv s_3 = 0.999 \quad 147 \quad 835 \quad 528$$

De afronding HD1 of het eerste gedeelte van de afgeronde tafel HD (1968-1972): $0 \geqslant x \geqslant 69$, wordt aldus volledig bepaald door de waarden:

$$s^* \equiv s_3 = 0.999 \quad 147 \quad 835 \quad 528$$

$$g^* \equiv g_2 = 0.999 \quad 731 \quad 696 \quad 667$$

$$c^* \equiv c_2 = 1.115 \quad 094 \quad 352 \quad 734$$

ii — Berekening van HD2($x \geqslant 70$).

Voor de afronding van het gedeelte HD2 neemt men volgende hypothesen aan:

$$s^*(\text{HD2}) = s^*(\text{HD1}) = 0.999 \quad 147 \quad 835 \quad 528$$

$$\mu_{70}(\text{HD2}) = \mu_{70}(\text{HD1})$$

$$l_{70}(\text{HD2}) \equiv l_{70}(\text{HD1})$$

De laatste voorwaarde, die het verband legt tussen de twee delen door te steunen op het aantal overlevenden op leeftijd 70 jaar, heeft genendele invloed op de afronding. Het enige gevolg zal erin bestaan dat de berekening van d_x ($x \geqslant 70$) gegeven wordt door

$$l_{x \geqslant 70} = l_{70}\, s^{x-70}\, g^{(c^x - c^{70})}$$

waarin s, g, c de waarden s^*, g^*, c^*, karakteristiek voor het gedeelte HD1, voorstellen.

De tweede voorwaarde brengt met zich mee dat:

$$-\ln s^* - c^{70} \ln c(\ln g) = -\ln s^* - c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)$$

waarin c en g de constanten van MAKEHAM voorstellen, die nog moeten bepaald worden voor HD2.

Men heeft achtereenvolgend:

$$c^{70}(\ln c)\ln g = c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)$$

$$\ln g = \frac{c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)}{c^{70} \ln c}$$

$$g = \exp \frac{c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)}{c^{70} \ln c}.$$

Men zoekt het minimum van:

$$S = \sum_{x=67}^{x=85} \left[p_x - s^* g^{c^x(c-1)}\right]^2$$

$$S = \sum_{x=67}^{x=85} \left[p_x - s^* e^{\frac{c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)}{c^{70} \ln c} \cdot c^x(c-1)}\right]^2$$

$$S = \sum_{x=67}^{x=85} \left[p_x - s^* e^{\frac{c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)}{\ln c} \cdot c^{x-70}(c-1)}\right]^2$$

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot de waarde :

$$c = 1.077 \quad 130 \quad 677 \quad 635 \quad .$$

Men bepaalt vervolgens de constante g voor de vergelijking :

$$g = \exp \frac{c^{*70}\, lnc^{*}(lng^{*})}{c^{70}\, ln\, c}.$$

Dit geeft uiteindelijk :

$$g = 0.995 \quad 564 \quad 574 \quad 228 \quad .$$

De afronding HD2 of het tweede gedeelte van de afgeronde tafel HD(1968-1972): $x \geqslant 70$, wordt dus volledig bepaald door de waarden :

$$s^{*} = 0.999 \quad 147 \quad 835 \quad 528$$

$$g^{*} = 0.995 \quad 564 \quad 574 \quad 228$$

$$c^{*} = 1.077 \quad 130 \quad 677 \quad 635.$$

De tabel II geeft de tafel HD(1968-1972). Deze tabel is opgebouwd uit 7 kolommen met respektievelijk :

x : leeftijd.

l_x : aantal overlevenden op leeftijd x ($l_0 = 10^6$).

d_x : aantal overlijdens op leeftijd x.

p_x : overlevingskans op leeftijd x.

q_x : sterftekans op leeftijd x.

μ_x : waarde van de onmiddellijke sterftekans op leeftijd x.

x : leeftijd.

De grafieken 7 tot 14 illustreren de afronding in de intervallen zoals hieronder aangegeven :

$1 \leqslant x \leqslant 20$	grafiek 7
$20 \leqslant x \leqslant 40$	grafiek 8
$40 \leqslant x \leqslant 60$	grafiek 9
$60 \leqslant x \leqslant 70$	grafiek 10
$70 \leqslant x \leqslant 80$	grafiek 11
$80 \leqslant x \leqslant 100$	grafiek 12
$0 \leqslant x \leqslant 70$	grafiek 13 (semi-logaritmisch
$0 \leqslant x \leqslant 99$	grafiek 14 papier)

Iedere grafiek bevat twee krommen :

— deze in volle lijn geeft de brutosterftekansen op leeftijd x aan.

— deze in puntlijn geeft de afgeronde waarschijnlijkheid van overlijden op leeftijd x aan.

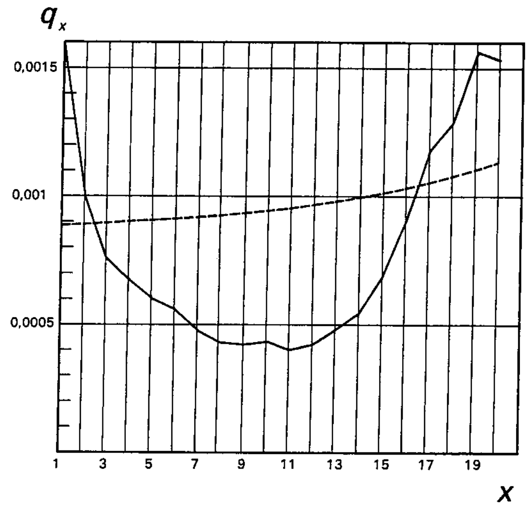
Tabel II.

De afgeronde tafel HD (1968-1972).

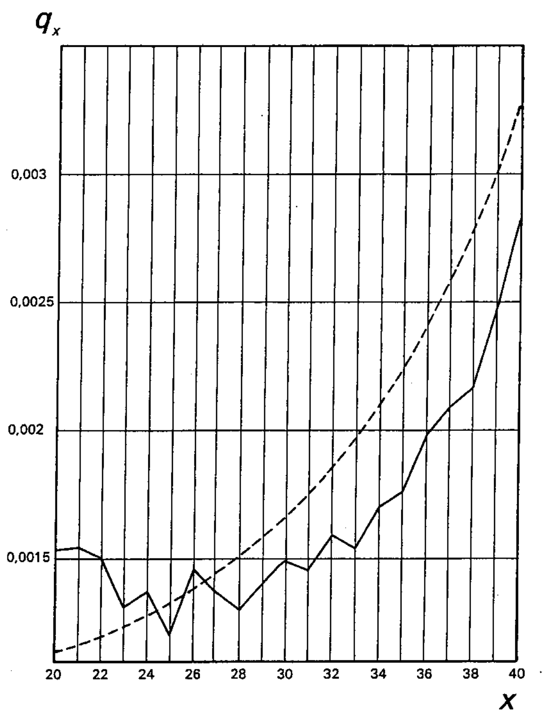
x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
0	1000000	883	0.999117	0.000883	0.000882	0
1	999117	886	0.999113	0.000887	0.000885	1
2	998231	889	0.999109	0.000891	0.000889	2
3	997342	892	0.999105	0.000895	0.000893	3
4	996450	897	0.999100	0.000900	0.000898	4
5	995553	901	0.999095	0.000905	0.000903	5
6	994652	907	0.999089	0.000911	0.000909	6
7	993745	913	0.999082	0.000918	0.000915	7
8	992832	919	0.999074	0.000926	0.000922	8
9	991913	927	0.999066	0.000934	0.000930	9
10	990986	935	0.999056	0.000944	0.000939	10
11	990051	945	0.999046	0.000954	0.000949	11
12	989106	956	0.999034	0.000966	0.000961	12
13	988150	967	0.999021	0.000979	0.000973	13
14	987183	982	0.999006	0.000994	0.000987	14
15	986201	996	0.998990	0.001010	0.001002	15
16	985205	1013	0.998972	0.001028	0.001020	16
17	984192	1032	0.998951	0.001049	0.001039	17
18	983160	1054	0.998929	0.001071	0.001060	18
19	982106	1077	0.998903	0.001097	0.001084	19
20	981029	1103	0.998875	0.001125	0.001111	20
21	979926	1133	0.998844	0.001156	0.001141	21
22	978793	1166	0.998809	0.001191	0.001174	22
23	977627	1203	0.998770	0.001230	0.001211	23
24	976424	1243	0.998726	0.001274	0.001252	24
25	975181	1290	0.998678	0.001322	0.001298	25
26	973891	1340	0.998624	0.001376	0.001349	26
27	972551	1397	0.998564	0.001436	0.001406	27
28	971154	1460	0.998496	0.001504	0.001470	28
29	969694	1531	0.998421	0.001579	0.001541	29
30	968163	1609	0.998338	0.001662	0.001620	30
31	966554	1697	0.998245	0.001755	0.001709	31
32	964857	1794	0.998141	0.001859	0.001807	32
33	963063	1903	0.998025	0.001975	0.001917	33
34	961160	2022	0.997896	0.002104	0.002040	34
35	959138	2157	0.997752	0.002248	0.002176	35
36	956981	2305	0.997591	0.002409	0.002329	36
37	954676	2471	0.997412	0.002588	0.002498	37
38	952205	2654	0.997212	0.002788	0.002688	38
39	949551	2859	0.996990	0.003010	0.002899	39
40	946692	3084	0.996742	0.003258	0.003135	40
41	943608	3336	0.996465	0.003535	0.003397	41
42	940272	3613	0.996157	0.003843	0.003690	42
43	936659	3922	0.995813	0.004187	0.004017	43
44	932737	4262	0.995430	0.004570	0.004381	44
45	928475	4640	0.995003	0.004997	0.004787	45
46	923835	5056	0.994527	0.005473	0.005240	46
47	918779	5515	0.993997	0.006003	0.005745	47
48	913264	6022	0.993406	0.006594	0.006308	48
49	907242	6581	0.992747	0.007253	0.006936	49
50	900661	7193	0.992013	0.007987	0.007636	50
51	893468	7868	0.991195	0.008805	0.008417	51
52	885600	8604	0.990284	0.009716	0.009287	52
53	876996	9412	0.989268	0.010732	0.010258	53
54	867584	10291	0.988138	0.011862	0.011341	54
55	857293	11249	0.986878	0.013122	0.012548	55

x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
56	846044	12288	0.985476	0.014524	0.013894	56
57	833756	13412	0.983914	0.016086	0.015395	57
58	820344	14622	0.982176	0.017824	0.017068	58
59	805722	15920	0.980241	0.019759	0.018935	59
60	789802	17306	0.978088	0.021912	0.021016	60
61	772496	18776	0.975693	0.024307	0.023337	61
62	753720	20329	0.973029	0.026971	0.025924	62
63	733391	21952	0.970067	0.029933	0.028810	63
64	711439	23638	0.966775	0.033225	0.032028	64
65	687801	25368	0.963117	0.036883	0.035616	65
66	662433	27123	0.959055	0.040945	0.039617	66
67	635310	28879	0.954544	0.045456	0.044079	67
68	606431	30600	0.949540	0.050460	0.049054	68
69	575831	32252	0.943991	0.056009	0.054601	69
70	543579	33225	0.938877	0.061123	0.060788	70
71	510354	33488	0.934384	0.065617	0.065410	71
72	476866	33588	0.929565	0.070435	0.070390	72
73	443278	33510	0.924404	0.075596	0.075753	73
74	409768	33241	0.918877	0.081123	0.081530	74
75	376527	32773	0.912960	0.087040	0.087753	75
76	343754	32097	0.906630	0.093370	0.094456	76
77	311657	31209	0.899860	0.100140	0.101676	77
78	280448	30113	0.892625	0.107375	0.109452	78
79	250335	28814	0.884897	0.115103	0.117828	79
80	221521	27325	0.876648	0.123352	0.126851	80
81	194196	25664	0.867848	0.132152	0.136569	81
82	168532	23852	0.858469	0.141531	0.147037	82
83	144680	21922	0.848479	0.151521	0.158312	83
84	122758	19905	0.837849	0.162151	0.170457	84
85	102853	17840	0.826548	0.173452	0.183539	85
86	85013	15766	0.814546	0.185454	0.197630	86
87	69247	13724	0.801813	0.198187	0.212808	87
88	55523	11753	0.788320	0.211680	0.229156	88
89	43770	9890	0.774040	0.225960	0.246765	89
90	33880	8167	0.758949	0.241051	0.265732	90
91	25713	6608	0.743022	0.256978	0.286163	91
92	19105	5230	0.726241	0.273759	0.308169	92
93	13875	4043	0.708589	0.291411	0.331872	93
94	9832	3048	0.690055	0.309945	0.357404	94
95	6784	2234	0.670633	0.329367	0.384905	95
96	4550	1591	0.650325	0.349675	0.414527	96
97	2959	1097	0.629137	0.370863	0.446435	97
98	1862	732	0.607087	0.392913	0.480803	98
99	1130	470	0.584200	0.415800	0.517821	99
100	660	290	0.560512	0.439488	0.557696	100
101	370	172	0.536070	0.463930	0.600645	101
102	198	97	0.510934	0.489066	0.646908	102
103	101	52	0.485176	0.514824	0.696738	103
104	49	26	0.458882	0.541118	0.750413	104
105	23	13	0.432152	0.567848	0.808227	105
106	10	6	0.405099	0.594901	0.870500	106
107	4	3	0.377851	0.622149	0.937576	107
108	1	0	0.350549	0.649451	1.009827	108
109	1	1	0.323343	0.676657	1.087649	109
110	0	0	0.296395	0.703605	1.171475	110

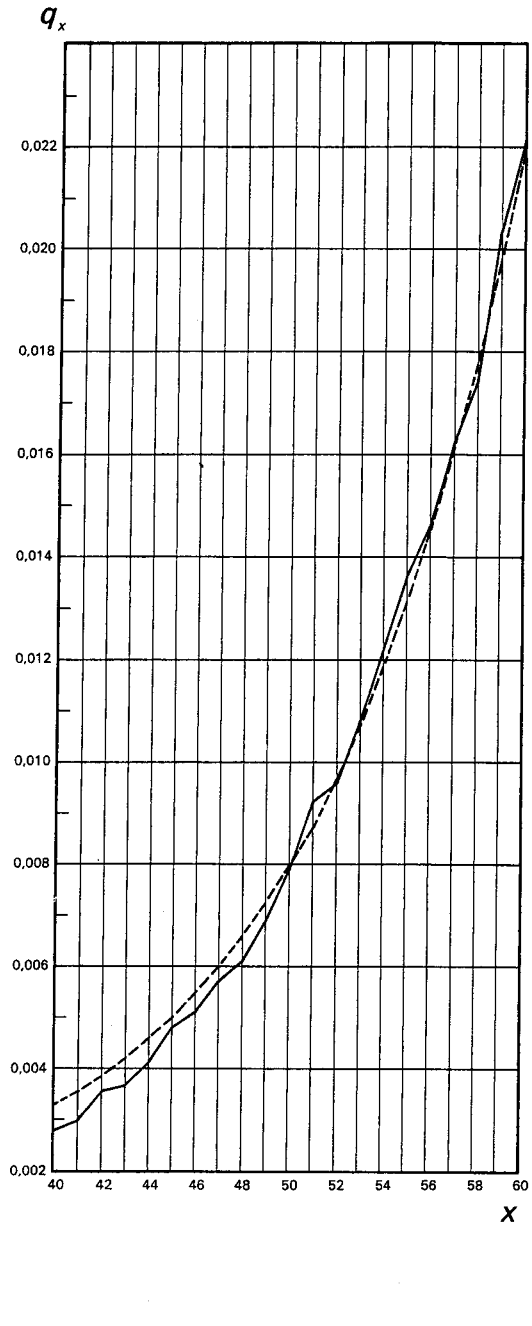
GRAFIEK 7.
HD

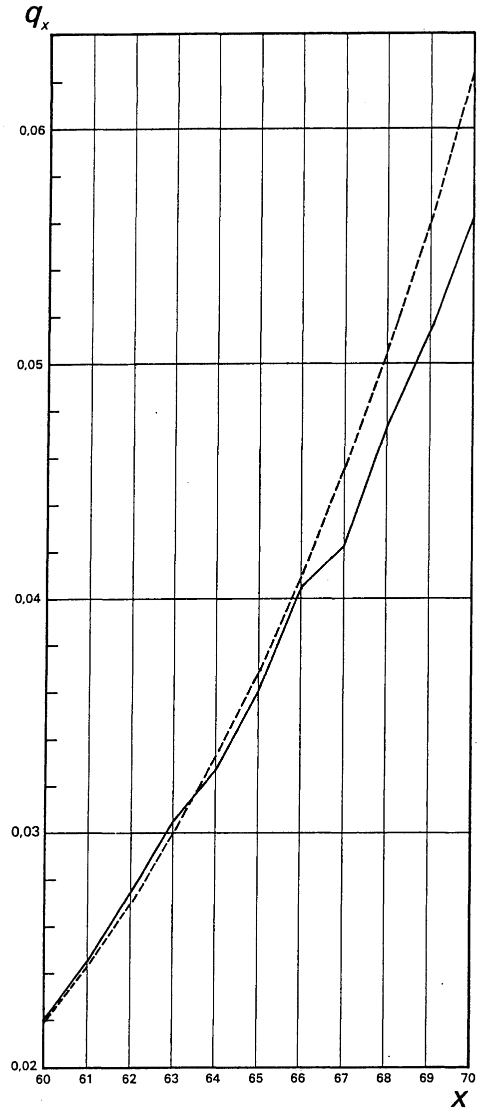


GRAFIEK 8.
HD



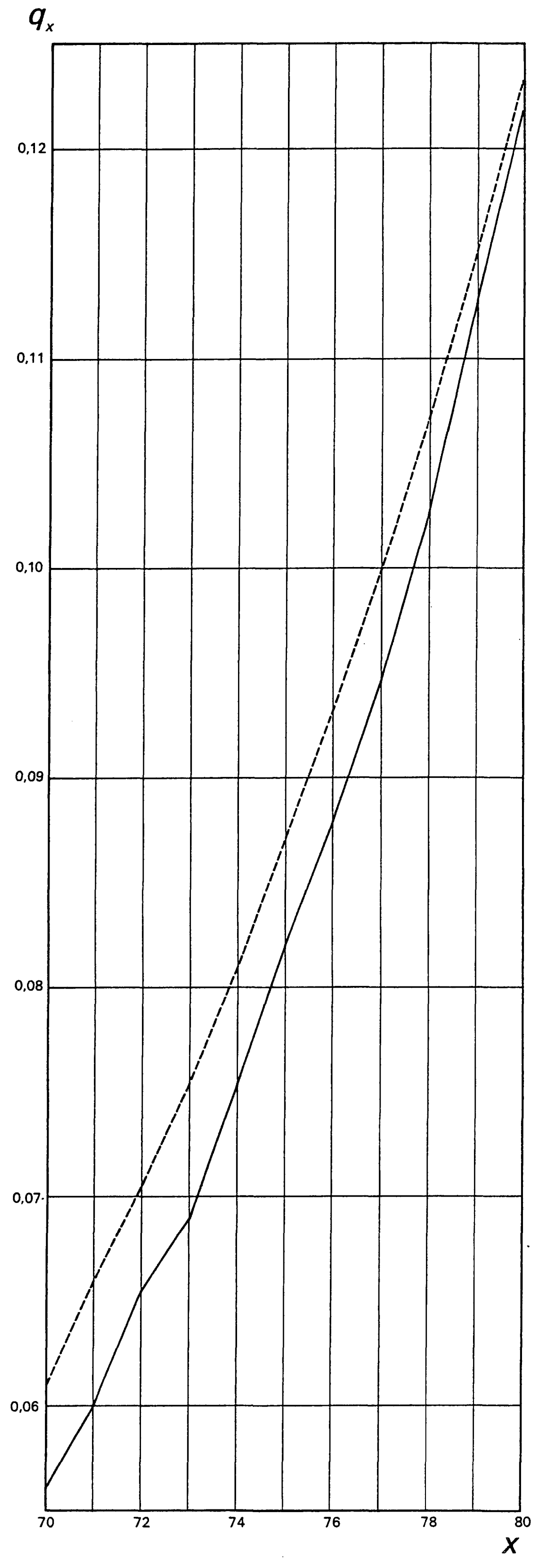
GRAFIEK 9.
HD

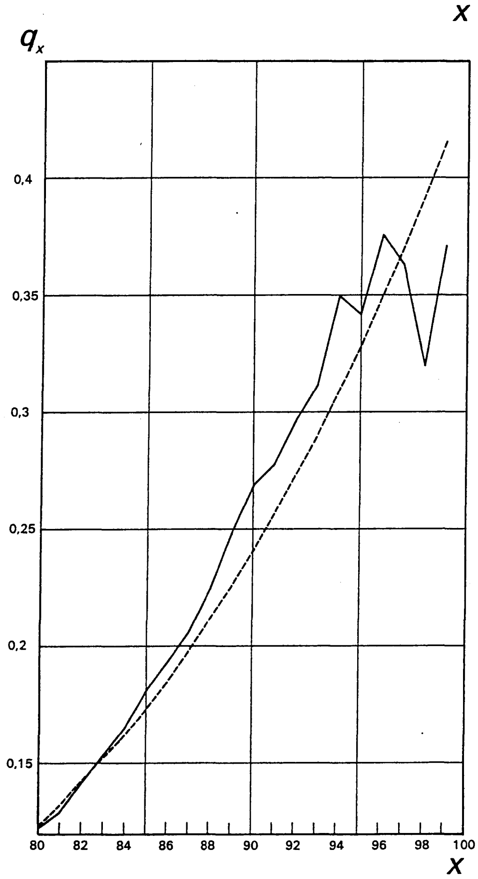




GRAFIEK 10.
HD

GRAFIEK 11.
HD

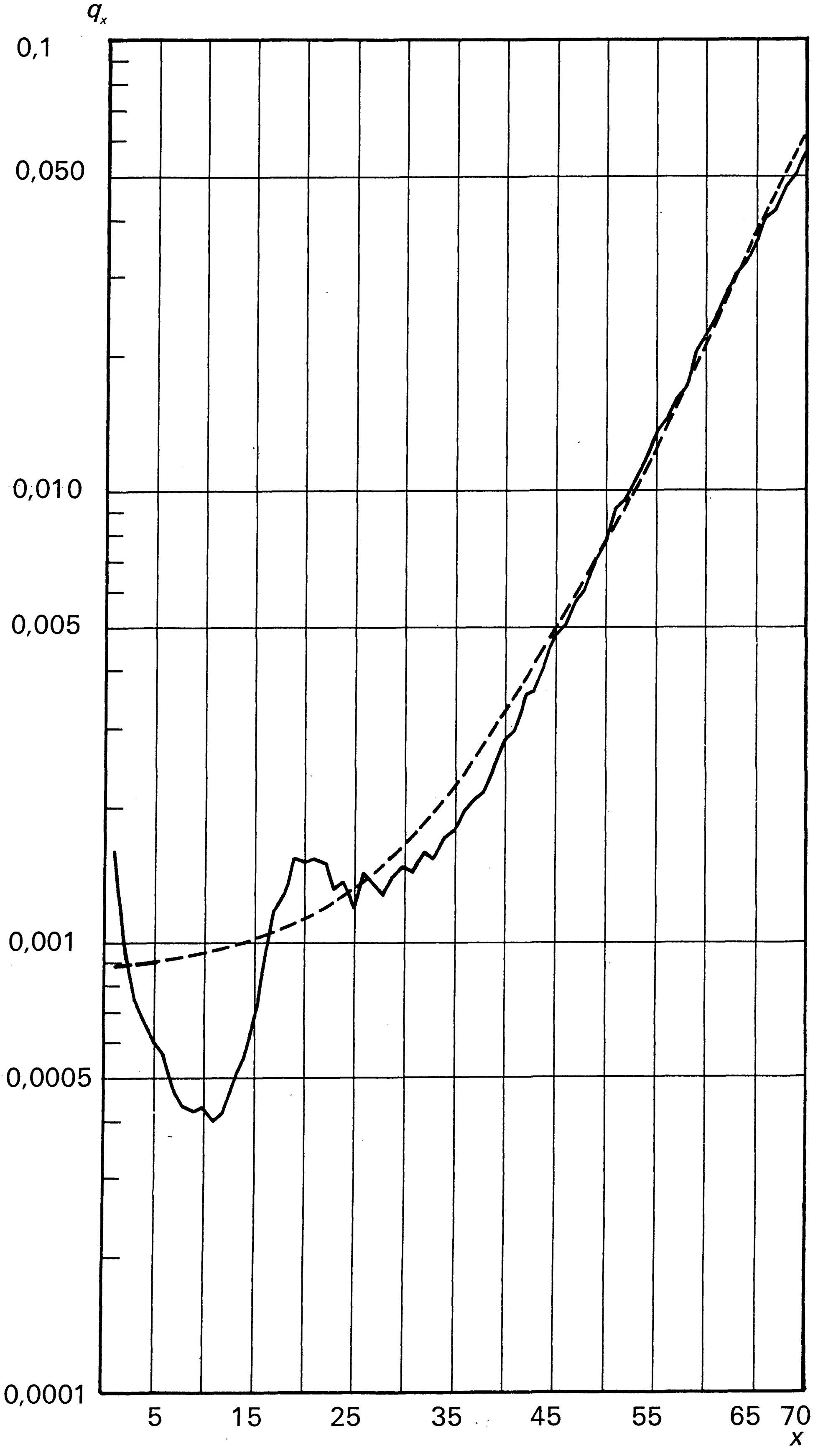




GRAFIEK 12.
HD

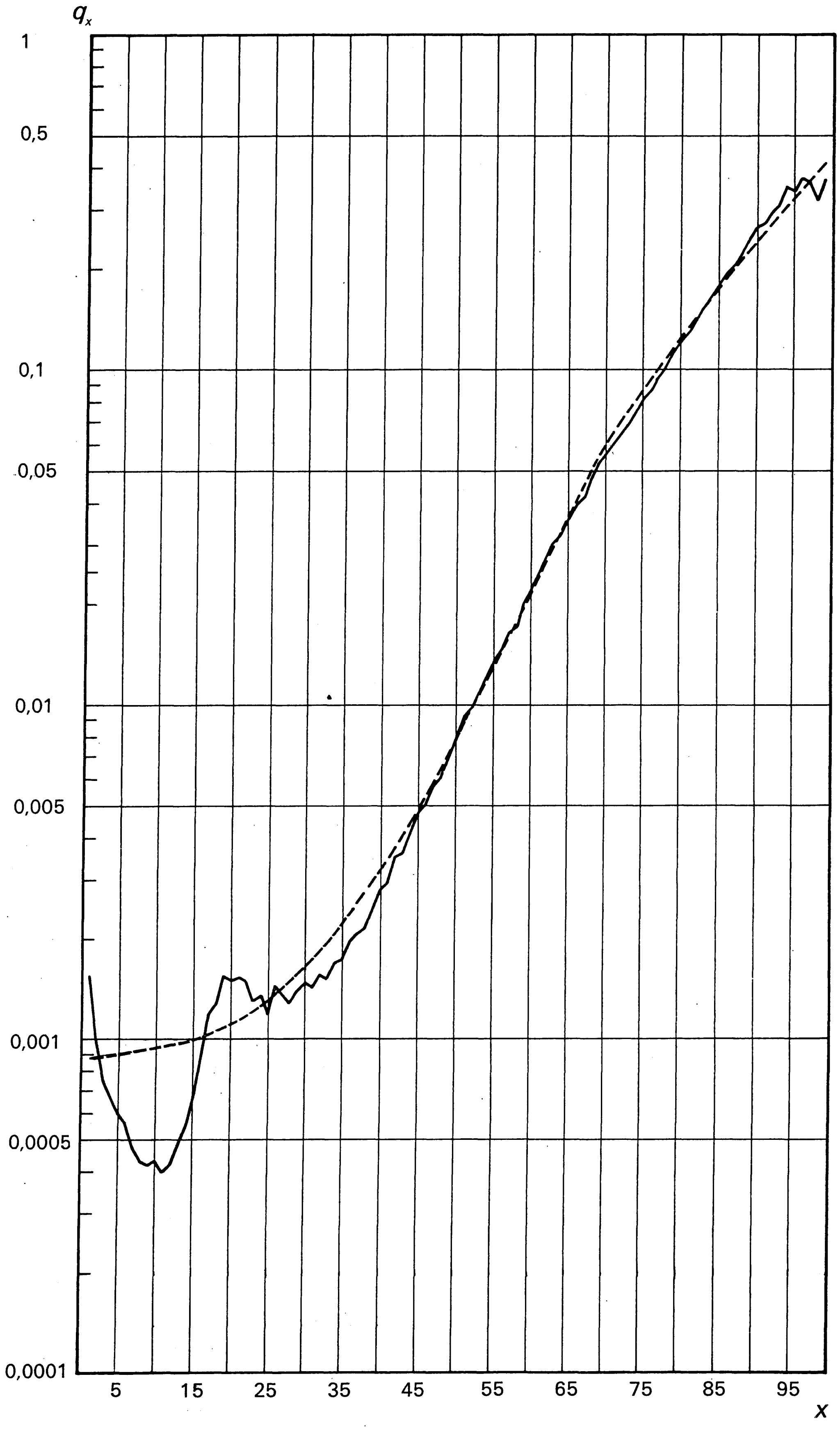
GRAFIEK 13.

HD



GRAFIEK 14.

HD



d. *De afgeronde tafel* HFR (1968-1972).

α — Men zoekt het minimum van:

$$S = \sum_{x=15}^{x=70} \left[p_x - s g^{c^x (c-1)} \right]^2 .$$

Vertrekkende van de initiële waarden

$$s_0 = 0.999\ 544$$

$$g_0 = 0.999\ 503$$

$$c_0 = 1.097\ 100,$$

leidt de methode van NEWTON-RAPHSON tot de volgende waarden:

$$s \equiv s_1 = 0.999\ 931\ 758\ 905$$

$$g \equiv g_1 = 0.999\ 230\ 057\ 766$$

$$c \equiv c_1 = 1.093\ 532\ 314\ 287.$$

β — Men zoekt het minimum van

$$S = \sum_{x=15}^{x=35} \left[p_x - s g^{c^x (c-1)} \right]^2 ,$$

waar g en c de waarden g_1 en c_1 hebben.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot:

$$s \equiv s_2 = 0.999\ 748\ 689\ 260.$$

γ — Men zoekt het minimum van

$$S = \sum_{x=15}^{x=70} \left[p_x - s g^{c^x (c-1)} \right]^2 ,$$

waar s de waarde s_2 heeft.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot:

$$g \equiv g_2 = 0.999\ 321\ 517\ 086$$

$$c \equiv c_2 = 1.095\ 209\ 173\ 124$$

δ — Men zoekt het minimum van

$$S = \sum_{x=15}^{x=30} \left[p_x - s g^{c^x (c-1)} \right]^2 ,$$

waar g en c de waarden g_2 en c_2 hebben.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot:

$$s \equiv s_3 = 0.999\ 587\ 967\ 271.$$

ε — Men zoekt het minimum van

$$S = \sum_{x=15}^{x=70} \left[p_x - s g^{c^x (c-1)} \right]^2 ,$$

waar s de waarde s_3 heeft.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot:

$$g \equiv g_3 = 0.999\ 393\ 260\ 503$$

$$c \equiv c_3 = 1.096\ 695\ 528\ 941.$$

ζ — Men zoekt het minimum van

$$S = \sum_{x=15}^{x=90} \left[p_x - s g^{c^x (c-1)} \right]^2 ,$$

waar s en g de waarden s_3 en g_3 hebben.

De methode van NEWTON-RAPHSON leidt tot:

$$c \equiv c_4 = 1.094\ 846\ 272\ 306.$$

De afronding HFR (1968-1972) is aldus volledig bepaald door de waarden:

$$s^* \equiv s_3 = 0.999\ 587\ 967\ 271$$

$$g^* \equiv g_3 = 0.999\ 393\ 260\ 503$$

$$c^* \equiv c_4 = 1.094\ 846\ 272\ 306.$$

Tabel III geeft de tafel HFR (1968-1972). Deze tafel is opgebouwd uit 7 kolommen welke respektievelijk vermelden:

x : leeftijd.

l_x : aantal overlevenden op leeftijd x ($l_0 = 10^6$).

d_x : aantal overlijdens op leeftijd x.

p_x : overlevingskans op leeftijd x.

q_x : sterftekans op leeftijd x.

μ_x : waarde van de onmiddellijke sterftekans op leeftijd x.

x : leeftijd.

De grafieken 15 tot 20 illustreren deze afronding in de intervallen zoals hieronder aangegeven.

$1 \leqslant x \leqslant 20$	grafiek 15
$20 \leqslant x \leqslant 40$	grafiek 16
$40 \leqslant x \leqslant 60$	grafiek 17
$60 \leqslant x \leqslant 80$	grafiek 18
$80 \leqslant x \leqslant 100$	grafiek 19
$0 \leqslant x \leqslant 100$	grafiek 20 (semi-logaritmisch papier)

Iedere grafiek bevat twee krommen:
— deze in volle lijn geeft de bruto sterftekans op leeftijd x aan.
— deze in puntlijn geeft de afgeronde sterftekans op leeftijd x aan.

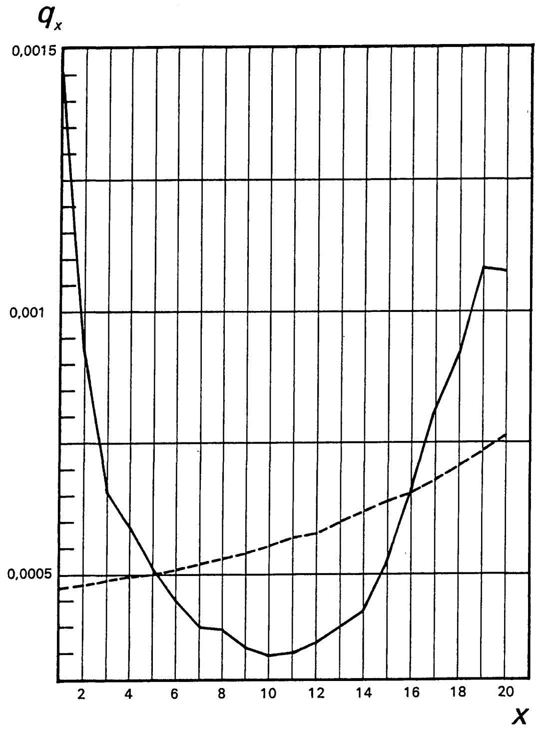
Tabel III.

De afgeronde tafel HFR (1968-1972).

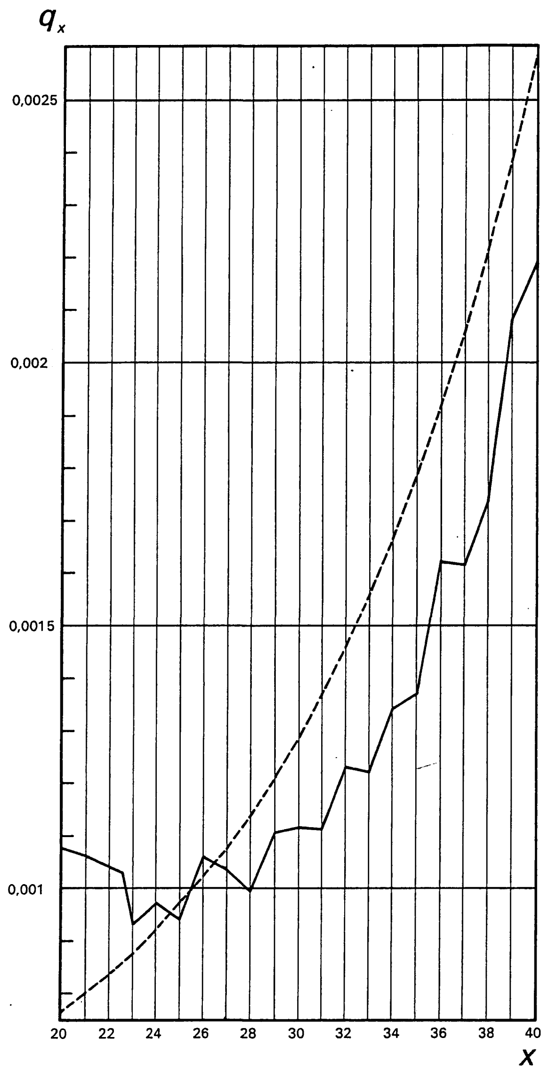
x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
0	1000000	470	0.999530	0.000470	0.000467	0
1	999530	474	0.999525	0.000475	0.000472	1
2	999056	481	0.999519	0.000481	0.000478	2
3	998575	487	0.999512	0.000488	0.000484	3
4	998088	494	0.999505	0.000495	0.000491	4
5	997594	501	0.999497	0.000503	0.000499	5
6	997093	510	0.999489	0.000511	0.000507	6
7	996583	518	0.999479	0.000521	0.000516	7
8	996065	529	0.999469	0.000531	0.000526	8
9	995536	540	0.999458	0.000542	0.000536	9
10	994996	551	0.999446	0.000554	0.000548	10
11	994445	565	0.999432	0.000568	0.000561	11
12	993880	579	0.999417	0.000583	0.000575	12
13	993301	595	0.999401	0.000599	0.000591	13
14	992706	612	0.999383	0.000617	0.000608	14
15	992094	631	0.999364	0.000636	0.000626	15
16	991463	652	0.999343	0.000657	0.000647	16
17	990811	674	0.999319	0.000681	0.000669	17
18	990137	699	0.999294	0.000706	0.000693	18
19	989438	726	0.999266	0.000734	0.000720	19
20	988712	756	0.999236	0.000764	0.000749	20
21	987956	788	0.999202	0.000798	0.000781	21
22	987168	824	0.999166	0.000834	0.000816	22
23	986344	862	0.999126	0.000874	0.000854	23
24	985482	905	0.999082	0.000918	0.000896	24
25	984577	952	0.999034	0.000966	0.000942	25
26	983625	1002	0.998981	0.001019	0.000992	26
27	982623	1057	0.998924	0.001076	0.001047	27
28	981566	1119	0.998861	0.001139	0.001107	28
29	980447	1184	0.998792	0.001208	0.001173	29
30	979263	1257	0.998716	0.001284	0.001246	30
31	978006	1337	0.998634	0.001366	0.001325	31
32	976669	1423	0.998543	0.001457	0.001411	32
33	975246	1517	0.998444	0.001556	0.001506	33
34	973729	1621	0.998336	0.001664	0.001610	34
35	972108	1733	0.998217	0.001783	0.001723	35
36	970375	1856	0.998087	0.001913	0.001848	36
37	968519	1991	0.997945	0.002055	0.001984	37
38	966528	2137	0.997789	0.002211	0.002133	38
39	964391	2296	0.997619	0.002381	0.002296	39
40	962095	2471	0.997432	0.002568	0.002475	40
41	959624	2660	0.997228	0.002772	0.002671	41
42	956964	2867	0.997004	0.002996	0.002885	42
43	954097	3092	0.996760	0.003240	0.003119	43
44	951005	3336	0.996492	0.003508	0.003376	44
45	947669	3603	0.996199	0.003801	0.003657	45
46	944066	3891	0.995878	0.004122	0.003965	46
47	940175	4206	0.995526	0.004474	0.004302	47
48	935969	4547	0.995142	0.004858	0.004671	48
49	931422	4917	0.994721	0.005279	0.005075	49
50	926505	5317	0.994261	0.005739	0.005517	50
51	921188	5751	0.993757	0.006243	0.006001	51
52	915437	6219	0.993206	0.006794	0.006531	52
53	909218	6726	0.992603	0.007397	0.007112	53
54	902492	7271	0.991943	0.008057	0.007747	54
55	895221	7859	0.991221	0.008779	0.008443	55

x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
56	887362	8491	0.990431	0.009569	0.009204	56
57	878871	9170	0.989567	0.010433	0.010038	57
58	869701	9896	0.988622	0.011378	0.010951	58
59	859805	10672	0.987588	0.012412	0.011951	59
60	849133	11500	0.986457	0.013543	0.013045	60
61	837633	12379	0.985221	0.014779	0.014244	61
62	825254	13313	0.983869	0.016131	0.015556	62
63	811941	14298	0.982391	0.017609	0.016992	63
64	797643	15334	0.980775	0.019225	0.018564	64
65	782309	16422	0.979009	0.020991	0.020286	65
66	765887	17554	0.977079	0.022921	0.022171	66
67	748333	18730	0.974971	0.025029	0.024235	67
68	729603	19942	0.972668	0.027332	0.026494	68
69	709661	21181	0.970153	0.029847	0.028968	69
70	688480	22440	0.967406	0.032594	0.031676	70
71	666040	23706	0.964408	0.035592	0.034642	71
72	642334	24963	0.961137	0.038863	0.037888	72
73	617371	26197	0.957567	0.042433	0.041443	73
74	591174	27386	0.953675	0.046325	0.045334	74
75	563788	28510	0.949431	0.050569	0.049595	75
76	535278	29544	0.944807	0.055193	0.054260	76
77	505734	30461	0.939769	0.060231	0.059367	77
78	475273	31232	0.934285	0.065715	0.064959	78
79	444041	31830	0.928317	0.071683	0.071081	79
80	412211	32224	0.921827	0.078173	0.077784	80
81	379987	32385	0.914774	0.085226	0.085122	81
82	347602	32287	0.907113	0.092887	0.093156	82
83	315315	31910	0.898799	0.101201	0.101953	83
84	283405	31236	0.889784	0.110216	0.111584	84
85	252169	30256	0.880018	0.119982	0.122128	85
86	221913	28971	0.869448	0.130552	0.133672	86
87	192942	27393	0.858022	0.141978	0.146311	87
88	165549	25547	0.845684	0.154316	0.160149	88
89	140002	23468	0.832378	0.167622	0.175300	89
90	116534	21203	0.818051	0.181949	0.191887	90
91	95331	18814	0.802648	0.197352	0.210048	91
92	76517	16366	0.786116	0.213884	0.229931	92
93	60151	13930	0.768406	0.231594	0.251700	93
94	46221	11580	0.749474	0.250526	0.275534	94
95	34641	9378	0.729280	0.270720	0.301628	95
96	25263	7382	0.707795	0.292205	0.330197	96
97	17881	5632	0.684997	0.315003	0.361476	97
98	12249	4154	0.660878	0.339122	0.395722	98
99	8095	2951	0.635445	0.364555	0.433215	99
100	5144	2013	0.608720	0.391280	0.474265	100
101	3131	1313	0.580747	0.419253	0.519208	101
102	1818	815	0.551594	0.448406	0.568414	102
103	1003	480	0.521350	0.478650	0.622287	103
104	523	267	0.490137	0.509863	0.681270	104
105	256	139	0.458102	0.541898	0.745846	105
106	117	67	0.425425	0.574575	0.816548	106
107	50	30	0.392315	0.607685	0.893955	107
108	20	13	0.359013	0.640987	0.978705	108
109	7	5	0.325785	0.674215	1.071492	109
110	2	1	0.292921	0.707079	1.173080	110
111	1	1	0.260730	0.739270	1.284303	111
112	0	0	0.229528	0.770472	1.406074	112

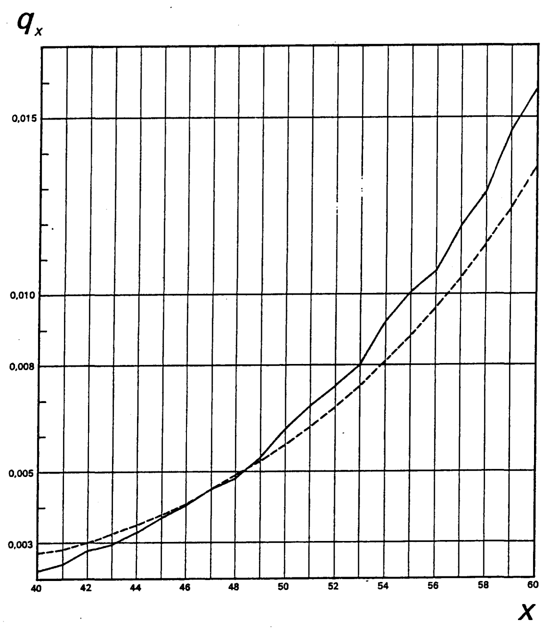
GRAFIEK 15.
HFR



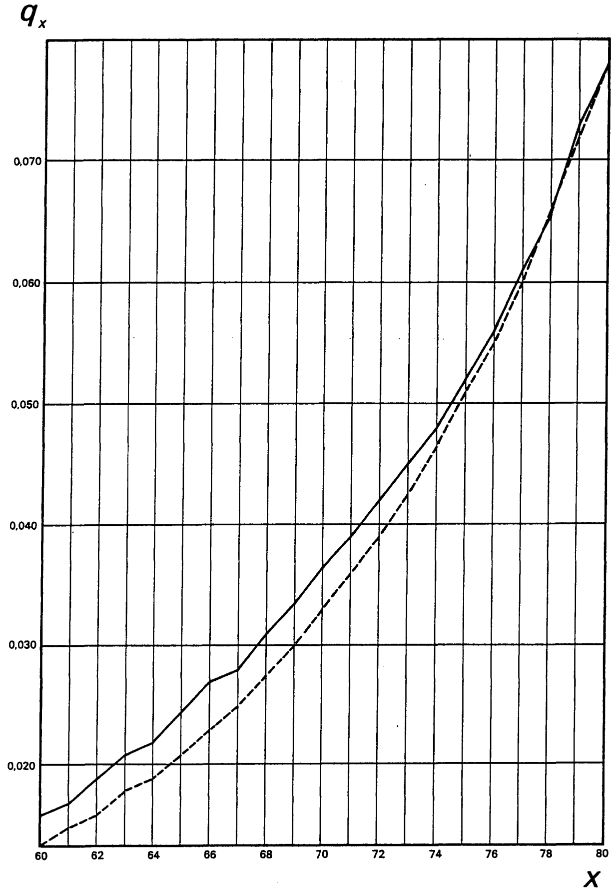
GRAFIEK 16.
HFR



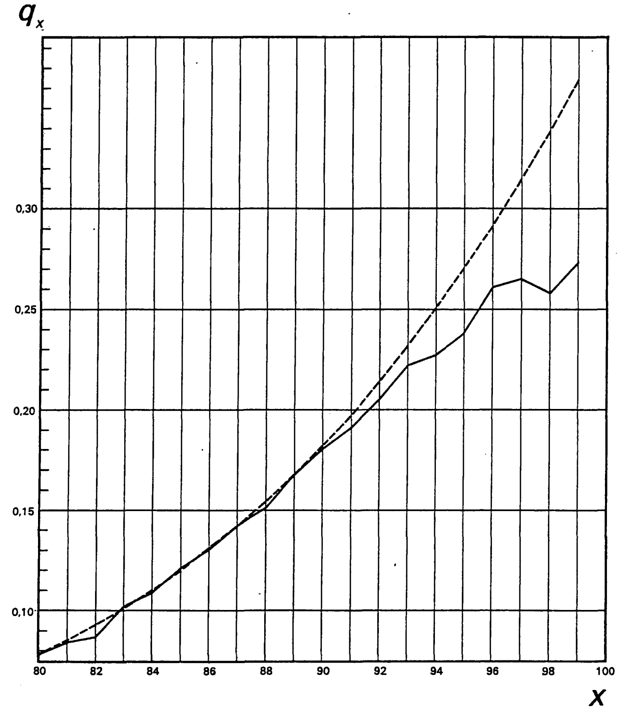
GRAFIEK 17.
HFR



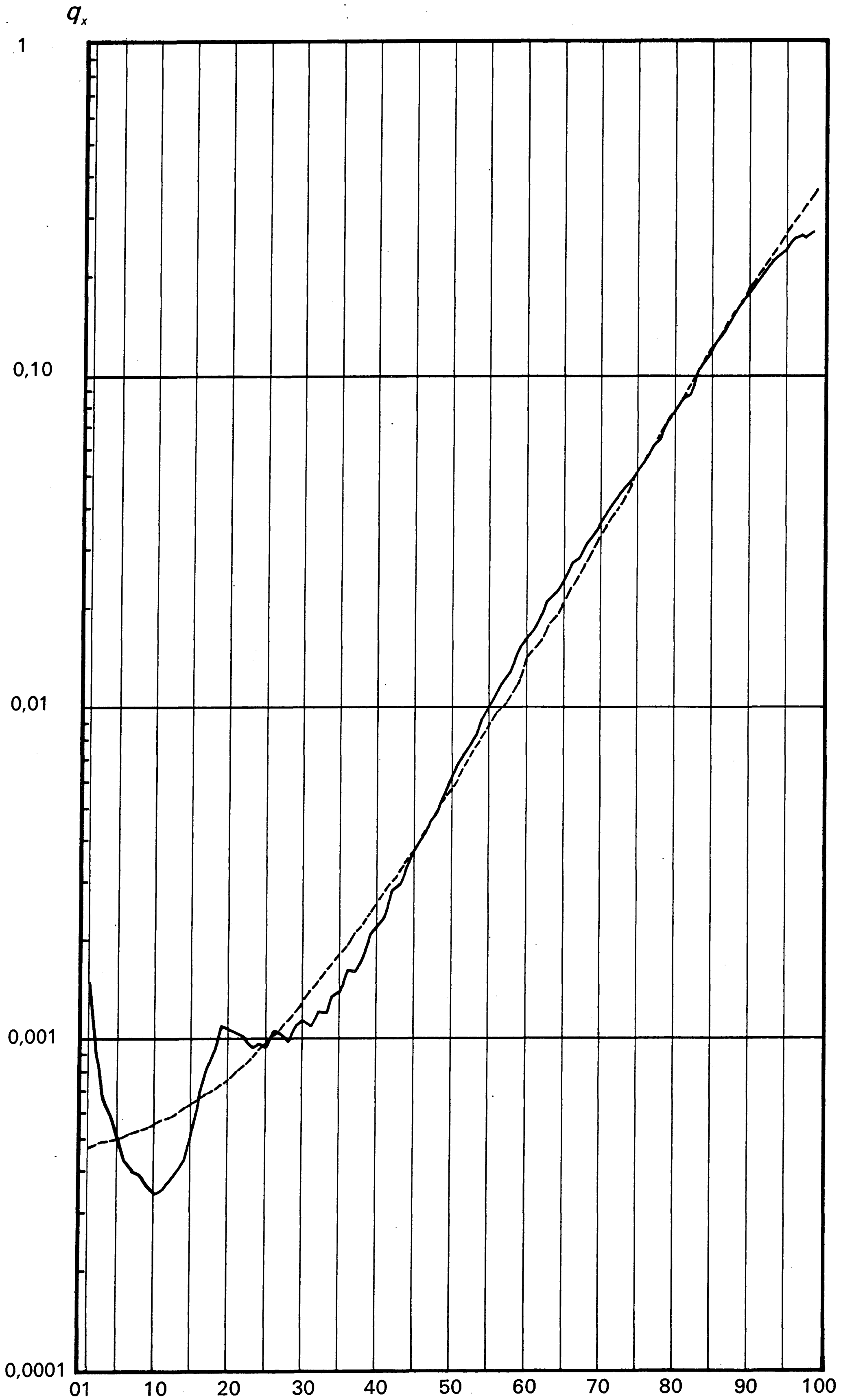
GRAFIEK 18.
HFR



GRAFIEK 19.
HFR



GRAFIEK 20.
HFR



e. *Samenvatting van de voorgestelde afrondingen.*

De tabel IV geeft de Makehamse constanten voor de drie afgeronde tafels.

Tabel IV.

HS (1968-1972)		$s = 0.999\ 407\ 845\ 556$ $g = 0.999\ 534\ 389\ 625$ $c = 1.105\ 046\ 034\ 668$
HD (1968-1972)	$0 \leqslant x \leqslant 69$	$s = 0.999\ 147\ 835\ 528$ $g = 0.999\ 731\ 696\ 667$ $c = 1.115\ 094\ 352\ 734$
	$x \geqslant 70$	$s = 0.999\ 147\ 835\ 528$ $g = 0.995\ 564\ 574\ 228$ $c = 1.077\ 130\ 677\ 635$
HFR (1968-1972)		$s = 0.999\ 587\ 967\ 271$ $g = 0.999\ 393\ 260\ 503$ $c = 1.094\ 846\ 272\ 306$

*
* *

6. — Bespreking van de afrondingen.

a. HS (1968-1972).

Deze tafel is geschikt voor een klassiek samengestelde portefeuille bestaande uit :
— gemengde verzekeringen $10/x$: $x \geqslant 10$ met uitzondering in het interval 60-70 jaar.
— levenslange verzekeringen bij overlijden.

Nochtans zijn de intervallen, waar het verschil tussen de sterftekansen op leeftijd x van de brutotafel en de afgeronde tafel aanzienlijk is, te groot om combinaties met groot risico kapitaal tot het einde toe te laten :
— tijdelijke verzekeringen bij overlijden
— gemengde verzekeringen $10/x$: $x \leqslant 5$.

In het bijzonder dient het interval met onderschatte sterftekans 50-70 beschouwd te worden als weinig geschikt en gevaarlijk voor deze laatste combinaties (die meer en meer voorkomen), rekening houdend met de evolutie van de sterftekans bij mannen op deze leeftijd.

b. HD (1968-1972).

Deze tafel vertoont een merkwaardige betrouwbaarheid. De verschillen tussen de vijfjaarlijkse gemiddelden zijn zeer gering in het interval 2-66 jaar. De kleine ondersterfte in het interval 17-24 is zonder belang. De sterftekans der verzekerden is immers zeer waarschijnlijk lager dan deze van de bruto tafel. Inderdaad deze verzekerden genieten nog van de recente selectie en bovendien is op die leeftijd de sterftekans van gehuwde mannen ofwel met familielast (dus mogelijk verzekerden bij overlijden) lager dan de sterftekans van vrijgezellen van hetzelfde geslacht.

Buiten het interval 17-24 j. geldt het verschijnsel van de gunstige compensatie in gans het interval 2-66.

Het interval 67-75 wordt gekenmerkt door oversterfte. Deze oversterfte blijft nochtans zonder grote gevolgen voor de tijdelijke verrichtingen. Daarentegen staat die oversterfte borg voor het verschijnsel van gunstige compensatie bij levenslange verrichtingen. Er weze opgemerkt dat deze oversterfte grotendeels voortspruit uit de keuze van 70 jaar als grens tussen de twee afrondingen.

Daarom brengt deze dubbele afronding met zich een discontinuiteit mee in de analytische uitdrukking van de sterftekansen; vandaar het gebruik van 6 constanten (met samenvoeging van de afrondingen langs de onmiddellijke sterftekans en het aantal overlevenden op leeftijd van 70 jaar).

Deze dubbele afronding maakt het *theoretisch* onmogelijk de gemiddelde Makehamiaanse leeftijd te gebruiken.

Praktisch dient men met deze onmogelijkheid geen rekening te houden voor bijna alle bestaande combinaties.

Inderdaad :

1 — De berekening van de gemiddelde leeftijd blijft volledig toepasbaar met de eerste waarde van c, voor alle combinaties waarvoor de hoogste leeftijd van het hoofd 70 jaar niet overschrijdt (praktisch voor alle tijdelijke verrichtingen), ofwel met de tweede waarde van c voor deze combinaties waarvoor de beginleeftijd van het hoofd minstens gelijk is aan 70 jaar.

2 — Principieel blijven er dus de verrichtingen op het gehele leven, aangegaan voor 70 jaar. Men kan ze onderverdelen in 3 groepen.

i — De levensverzekeringen op 2 hoofden.

Indien men voor $x \leqslant 70$ als gemiddelde leeftijd het rekenkundig gemiddelde neemt der leeftijden bekomen voor iedere c waarde, dan begaat men een zeer kleine fout. Deze gaat niet boven de 6 maand zowel voor de uiterste verschillen ($x - y \geqslant 30$) als voor de uiterste leeftijden. Anders gezegd zes maand is de maximale fout voor de benadering voor de gemiddelde leeftijd in volle leeftijd welke het dichtst bijgelegen is.

Voor $x > 70$ volstaat het de gemiddelde leeftijd te nemen overeenkomstig met de tweede waarde van c.

ii — Levenslange overlevensverrichtingen.

Voor deze verrichtingen kunnen twee oplossingen worden aangenomen:

— ofwel maakt men gebruik van een verschillende tafel voor iedere verzekerde en het probleem van de gemiddelde leeftijd stelt zich niet.

— ofwel gebruikt men de tafel HD(1968-1972) voor de twee hoofden. De gedeeltelijke compensatie die bestaat tussen de oversterfte van de verzekerde bij overlijden en deze van de verzekerde bij leven laat toe gebruik te maken van de gemiddelde leeftijd die overeenstemt met de eerste c-waarde ($x < 70$), zoals voor de tijdelijke verrichtingen.

iii — Speciale verrichtingen op meerdere hoofden en bij oversterfte.

Voor deze verrichtingen kan men ofwel de exacte berekeningen uitvoeren ofwel teruggrijpen naar bestaande benaderingsformules.

Samenvattend, de moeilijkheid van de dubbele afronding wat betreft het gebruik van de gemiddelde leeftijd komt praktisch neer op het maken van één of twee supplementaire leeftijdskolommen bij te voegen bij deze van het jongste hoofd (of weg te laten van deze van het oudste hoofd) en verder zich uitsluitend te baseren op de tarief van levensverzekeringen op twee hoofden.

Men vindt deze waarden (berekend tot op 3 decimalen) in bijlage 2.

c. HFR(1968-1972).

Deze tafel volgt opmerkelijk de verbeterde bruto tafel en voornamelijk in het essentiele interval (70-90).

De lichte ondersterfte in het interval (50-70) is toelaatbaar; dit komt overeen, bij het verschijnsel van de gunstige compensatie met de lichte oversterfte op jeugdige leeftijd (deze wordt wegens de zeer lage sterftekans gecompenseerd door een zeer kleine speling op de interest).

Het is niet te verantwoorden voor jeugdige leeftijden een te groot verschil te vinden tussen de waarden van de tafel „overlijden" en deze van de tafel „leven". Dit geldt vooreerst wegens de opmerking omtrent het interval (17-24) voor de tafel HD; vervolgens ook omdat in tegenstelling met de verrichtingen bij overlijden, deze bij leven ook de verzekerden bevatten van de leeftijd $x : 0 \leqslant x \leqslant 5$, waarvoor de sterftekans groter is dan gegeven door de afronding.

* * *

7. — Bijlage.

1. *Algemene principes voor de keuze van de grenzen der afronding.*

i — De intervallen A, AB, DE en E worden nooit rechtstreeks in aanmerking genomen voor de afronding der bruto-tafels. Zij zijn afgerond door analytische *extrapolatie* van de functie bekomen in de andere intervallen. Onrechtstreeks spelen ze toch min of meer een rol, ze geven een zeker gewicht aan de aangrenzende intervallen.

ii — Het interval D komt nooit volledig tussen bij de bepaling van de waarden s, g en c maar enkel om c te beïnvloeden. In het tegenovergestelde geval zou men wegens het belangrijk gewicht van dit interval, gevaar lopen van onrealistische s-waarden alsook g-waarden te ver afwijkend van één te bekomen. Dit alles wegens de relatieve daling van de sterftekans bij deze leeftijden alsook wegens de invloed van c op g in de optimisatie techniek.

iii — Het interval B komt steeds twee keer voor, enerzijds om aan s nauwkeuriger waarden te geven dan deze bekomen voor een eerste optimisatie op een meer algemeen interval, anderzijds om bij te dragen tot het verschijnsel van de gunstige compensatie.

*

2. *Berekening van de waarde w voor de verschillende afgeronde tafels.*

De tabel A geeft de waarde van

$$w = \frac{1}{ln\, c}\, ln \frac{1 + c^x}{2}$$

$$1 \leqslant x \leqslant 100,$$

voor de afronding: HS (2^e kolom)
HFR (6^e kolom)
HD1 (3^e kolom)
HD2 (4^e kolom) alsook het rekenkundig gemiddelde van de kolommen 3 en 4.

Tabel A.

x	$w(HS)$	$w(HD1)$	$w(HD2)$	$\frac{w(HD1)+w(HD2)}{2}$	$w(HFR)$	x
1	0.512	0.514	0.509	0.511	0.511	1
2	1.050	1.054	1.037	1.046	1.045	2
3	1.612	1.622	1.583	1.603	1.602	3
4	2.198	2.216	2.148	2.182	2.180	4
5	2.809	2.836	2.731	2.784	2.781	5
6	3.443	3.482	3.332	3.407	3.403	6
7	4.100	4.152	3.950	4.051	4.046	7
8	4.779	4.845	4.586	4.716	4.710	8
9	5.479	5.561	5.239	5.400	5.393	9
10	6.200	6.299	5.908	6.104	6.096	10
11	6.940	7.058	6.594	6.826	6.817	11
12	7.700	7.835	7.295	7.565	7.557	12
13	8.477	8.631	8.012	8.322	8.313	13
14	9.270	9.444	8.744	9.094	9.085	14
15	10.080	10.274	9.490	9.882	9.874	15
16	10.905	11.118	10.250	10.684	10.676	16
17	11.743	11.975	11.023	11.499	11.493	17
18	12.595	12.846	11.808	12.327	12.323	18
19	13.459	13.728	12.607	13.167	13.166	19
20	14.334	14.622	13.416	14.019	14.020	20
21	15.220	15.525	14.237	14.881	14.885	21
22	16.115	16.437	15.069	15.753	15.760	22
23	17.020	17.358	15.911	16.634	16.645	23
24	17.932	18.286	16.762	17.524	17.538	24
25	18.853	19.221	17.623	18.422	18.440	25
26	19.780	20.162	18.492	19.327	19.350	26
27	20.714	21.110	19.370	20.240	20.267	27
28	21.654	22.062	20.255	21.158	21.191	28
29	22.599	23.019	21.147	22.083	22.120	29
30	23.549	23.980	22.047	23.014	23.056	30
31	24.503	24.946	22.953	23.949	23.996	31
32	25.462	25.914	23.865	24.890	24.942	32
33	26.425	26.886	24.783	25.834	25.892	33
34	27.391	27.861	25.706	26.783	26.846	34
35	28.360	28.838	26.635	27.736	27.804	35
36	29.332	29.817	27.568	28.693	28.765	36
37	30.306	30.799	28.506	29.652	29.730	37
38	31.283	31.782	29.448	30.615	30.698	38
39	32.262	32.767	30.394	31.581	31.668	39
40	33.243	33.754	31.343	32.549	32.641	40
41	34.226	34.742	32.296	33.519	33.616	41
42	35.210	35.731	33.252	34.492	34.593	42
43	36.196	36.722	34.211	35.467	35.572	43
44	37.183	37.713	35.173	36.443	36.553	44
45	38.172	38.705	36.138	37.422	37.536	45
46	39.161	39.698	37.105	38.402	38.520	46
47	40.152	40.692	38.075	39.383	39.505	47
48	41.143	41.686	39.046	40.366	40.492	48
49	42.135	42.681	40.020	41.350	41.480	49
50	43.128	43.677	40.995	42.336	42.469	50
51	44.122	44.673	41.972	43.322	43.459	51
52	45.116	45.669	42.951	44.310	44.449	52
53	46.111	46.666	43.931	45.298	45.441	53
54	47.106	47.663	44.912	46.288	46.433	54
55	48.102	48.660	45.895	47.278	47.426	55
56	49.098	49.658	46.879	48.269	48.419	56
57	50.094	50.656	47.865	49.260	49.413	57

x	$w(\text{HS})$	$w(\text{HD1})$	$w(\text{HD2})$	$\frac{w(\text{HD1})+w(\text{HD2})}{2}$	$w(\text{HFR})$	x
58	51.091	51.654	48.851	50.252	50.408	58
59	52.088	52.652	49.838	51.245	51.403	59
60	53.086	53.651	50.826	52.238	52.398	60
61	54.083	54.649	51.815	43.232	53.394	61
62	55.081	55.648	52.805	54.226	54.391	62
63	56.079	56.647	53.795	55.221	55.387	63
64	57.077	57.646	54.786	56.216	56.384	64
65	58.076	58.645	55.778	57.212	57.381	65
66	59.074	59.644	56.771	58.207	58.378	66
67	60.073	60.643	57.763	59.203	59.376	67
68	61.072	61.643	58.757	60.200	60.374	68
69	62.071	62.642	59.751	61.196	61.372	69
70	63.070	63.642	60.745	62.193	62.370	70
71	64.069	64.641	61.740	63.191	63.368	71
72	65.068	65.641	62.735	64.188	64.367	72
73	66.068	66.641	63.730	65.185	65.365	73
74	67.067	67.640	64.726	66.183	66.364	74
75	68.066	68.640	65.722	67.181	67.363	75
76	69.066	69.640	66.718	68.179	68.362	76
77	70.065	70.639	67.715	69.177	69.361	77
78	71.065	71.639	68.712	70.176	70.360	78
79	72.064	72.639	69.709	71.174	71.359	79
80	73.064	73.639	70.706	72.173	72.358	80
81	74.064	74.639	71.704	73.171	73.358	81
82	75.063	75.639	72.701	74.170	74.357	82
83	76.063	76.638	73.699	75.169	75.357	83
84	77.063	77.638	74.697	76.168	76.356	84
85	78.063	78.638	75.695	77.167	77.356	85
86	79.063	79.638	76.694	78.166	78.355	86
87	80.062	80.638	77.692	79.165	79.355	87
88	81.062	81.638	78.691	80.164	80.354	88
89	82.062	82.638	79.689	81.163	81.354	89
90	83.062	83.638	80.688	82.163	82.354	90
91	84.062	84.638	81.687	83.162	83.353	91
92	85.062	85.638	82.686	84.162	84.353	92
93	86.062	86.638	83.684	85.161	85.353	93
94	87.062	87.638	84.684	86.161	86.353	94
95	88.061	88.638	85.683	87.160	87.353	95
96	89.061	89.638	86.682	88.160	88.352	96
97	90.061	90.638	87.681	89.159	89.352	97
98	91.061	91.638	88.680	90.159	90.352	98
99	92.061	92.637	89.680	91.159	91.352	99
100	93.061	93.637	90.679	92.158	92.352	100

Omtrent de afronding van een sterftetafel volgens het schema van Makeham (*)

1. — Inleiding.

Dit artikel heeft als doel :

i — de actuariële analyse :

— van de optimale afronding volgens het schema van Makeham en in de zin der kleinste kwadraten, van het aantal overlevenden op de leeftijd x volgens de bruto-sterftetafel M + V (1959-1963).[1]

— van de geïnduceerde afronding van de sterftekans op de leeftijd x, volgens dezelfde tafel.

ii — door toepassing van een numerieke iteratieve methode — voor bovenvermelde tafel — op bepaalde leeftijdsintervallen, de optimale ramingsfaktoren, volgens het schema van Makeham en in de zin van de kleinste kwadraten, te bekomen van de afrondingsparameters van de sterftekans op de leeftijd x.

iii — de verschillende aldus bekomen afrondingen met deze van de Beroepsvereniging der verzekeringsondernemingen te vergelijken. [2] [3]

*

Dit artikel bevat tevens enkele concepten die bij de afronding van de bruto-sterftetafels M, V, M + V (1968-1972) volgens de telling op 31 december 1970, kunnen worden aangewend.

* *
*

(*) Dit artikel werd opgesteld door Yves BALLEGEER en Jean-Pierre ANDRE-DUMONT. Ze bedanken de Heer P. BAERT voor de nuttige opmerkingen en suggesties bij het opstellen van dit artikel.

2. — Optimale afronding volgens het schema van Makeham en in de zin der kleinste kwadraten, van het aantal overlevenden volgens de brutotafel M + V (1959-1963).

a. *Samenvatting van de afronding.*

De optimale afronding volgens het schema van Makeham en in de zin der kleinste kwadraten, van het aantal overlevenden op de leeftijd x volgens de bruto-tafel M + V (1959-1963), kan als volgt worden samengevat :

Relatief verschil tussen het bruto-aantal overlevenden en het geadjusteerde aantal overlevenden.	Leeftijdsintervallen.
< 1 %	$17 \leqslant x \leqslant 85$
< 2 %	$5 \leqslant x \leqslant 87$

Dezelfde tabel die het B.V.V.O. voor zijn afronding heeft opgezet ziet er zo uit :

< 1 %	$x = 97$
< 2 %	$71 \leqslant x \leqslant 78$

Echter, het einde van de afronding ($x \geqslant 93$) blijkt gebrekkig in vergelijking met de B.V.V.O.-afrondingen.

Deze samenvatting wordt geïllustreerd door de grafieken I tot VI, waarin de kwantiteit $\frac{l_x}{l_0}$ in functie van x respectievelijk wordt voorgesteld voor de leeftijdsintervallen :

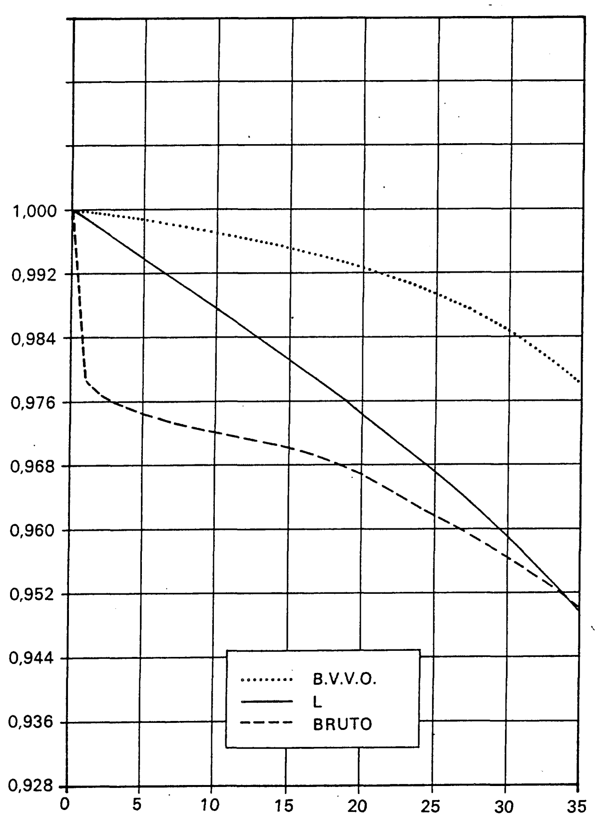
$$0 \leqslant x \leqslant 35 \text{ (I)}; \quad 36 \leqslant x \leqslant 51 \text{ (II)};$$
$$52 \leqslant x \leqslant 67 \text{ (III)}; \quad 68 \leqslant x \leqslant 77 \text{ (IV)};$$
$$78 \leqslant x \leqslant 100 \text{ (V)}; \quad 0 \leqslant x \leqslant 100 \text{ (VI)}.$$

Elke grafiek vertoont drie krommen die de kwantiteit $\frac{l_x}{l_0}$ weergeven, respectievelijk uitgerekend voor :

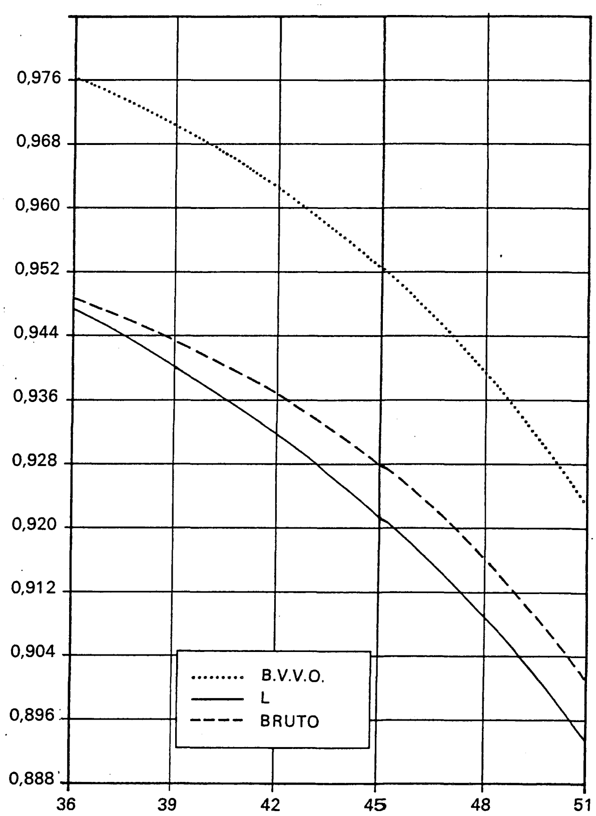
de bruto-tafel (------ BRUTO)
de B.V.V.O.-tafel (..... B.V.V.O.)
de optimale tafel (—— L)

*

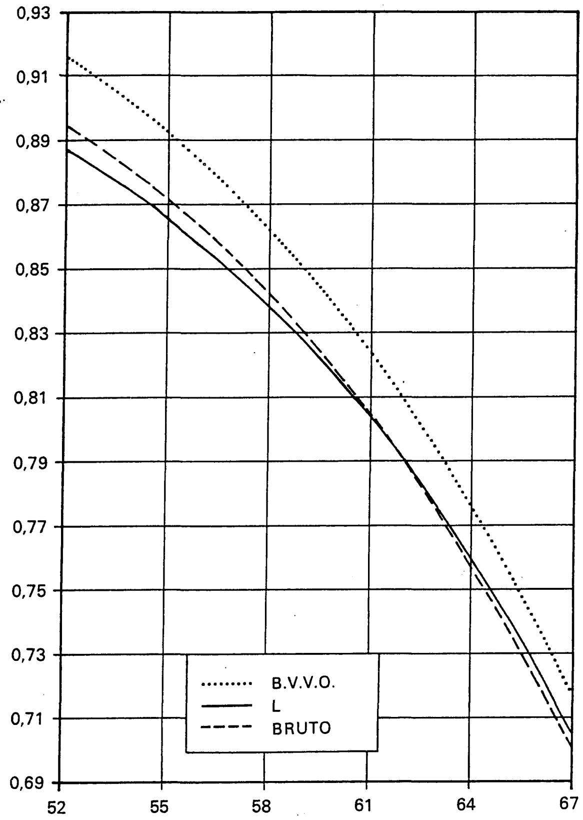
GRAFIEK I.



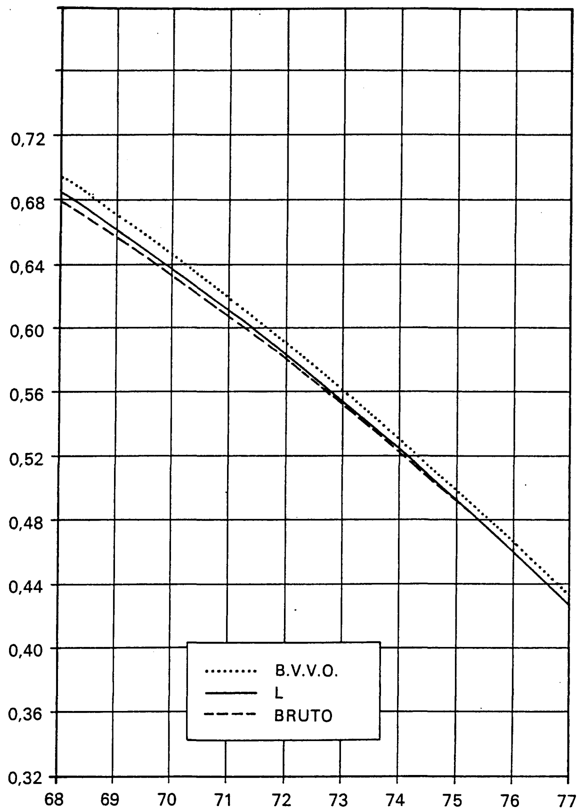
GRAFIEK II.



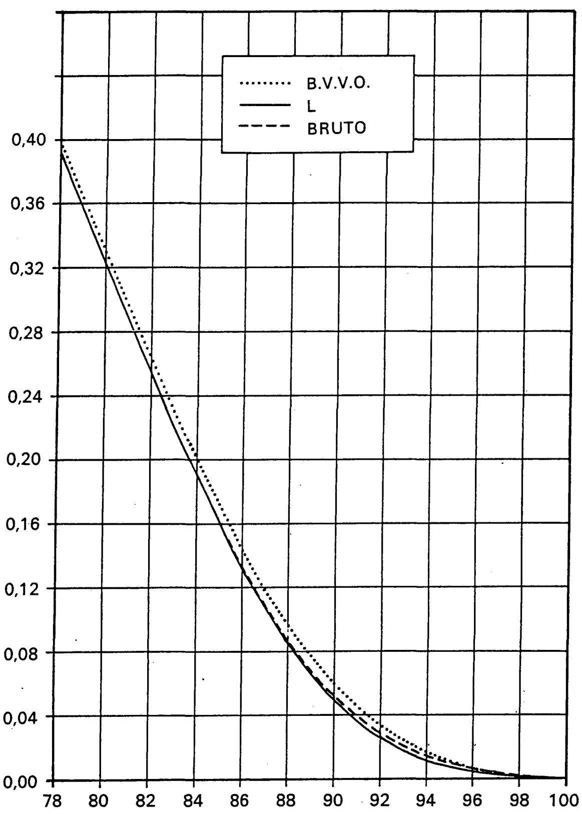
GRAFIEK III.



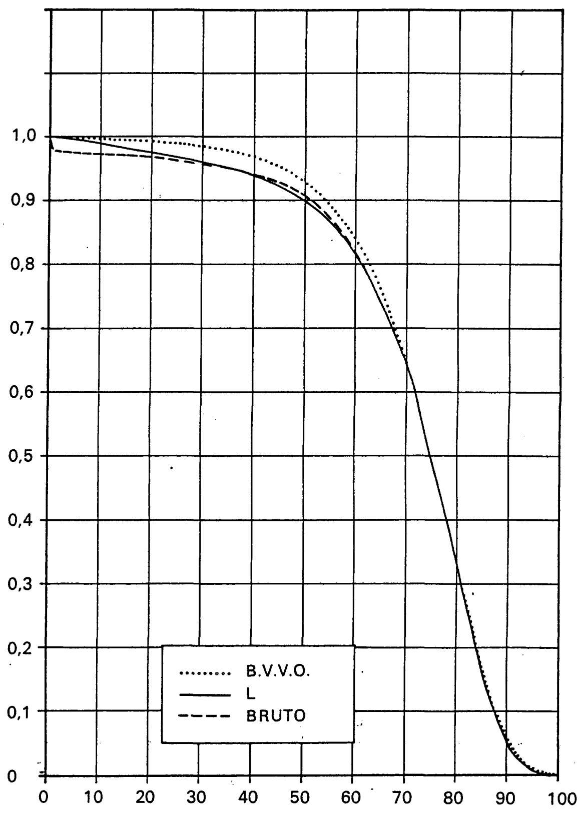
GRAFIEK IV.



GRAFIEK V.



GRAFIEK VI.



b. *Geïnduceerde afronding van de sterftekans.*

De optimale afronding volgens het schema van Makeham en in de zin der kleinste kwadraten van het aantal overlevenden, induceert een afronding van de sterftekans. Gaat men evenwel uit van de kleinste kwadraten dan blijkt deze laatste afronding gebrekkig in vergelijking met de afronding van de sterftekans als resultaat van de B.V.V.O.-berekeningen (1).

Evenwel, de geïnduceerde adjustering van de sterftekans door deze van het aantal overlevenden is hier en daar beter dan de afronding van de B.V.V.O. voor de volgende leeftijdsintervallen:

$$0 \leqslant x \leqslant 2; \quad 21 \leqslant x \leqslant 23; \quad 47 \leqslant x \leqslant 50;$$

$$x = 52; \quad 66 \leqslant x \leqslant 73; \quad 76 \leqslant x \leqslant 87.$$

De eerste vier leeftijdsintervallen zijn weinig belangrijk; voegt men de laatste twee samen dan kan worden geconcludeerd dat de afronding van de sterftekans als resultaat van deze van het aantal overlevenden beter is dan de afronding van de sterftekans volgens B.V.O.O. voor $65 \leqslant x \leqslant 85$ (2).

(1) De som van de kwadraten der verschillen tussen de bruto-sterftekansen en de door afronding van het aantal overlevenden bekomen sterftekansen is gelijk aan 0,096, terwijl de som van de kwadraten der verschillen tussen bruto-sterftekansen en de door afronding volgens de B.V.V.O. bekomen sterftekansen 0,026 bedraagt.

(2) De som van de kwadraten der verschillen tussen de bruto-sterftekansen en de door afronding van het aantal overlevenden bekomen sterftekansen is gelijk aan 0,00003 terwijl de som van de kwadraten der verschillen tussen de brutosterftekansen en de door afronding volgens de B.V.V.O. bekomen sterftekansen 0,0004 bedraagt.

Tabel I en de grafieken VII tot XIV brengen deze conclusies in beeld.

Tabel I is onderverdeeld in volgende 6 kolommen:

x	leeftijd
q_x	bruto-sterftekans op de leeftijd x
$q_x(l)$	sterftekans op de leeftijd x, resultaat van de afronding van het aantal overlevenden
q_x(B.V.V.O.)	sterftekans op de leeftijd x, resultaat van de afronding volgens de B.V.V.O.
% (l)	$\frac{q_x - q_x(l)}{q_x} 100$

$$\% \text{ B.V.V.O.} = \frac{q_x - q_x\text{(B.V.V.O.)}}{q_x} \cdot 100$$

De grafieken VII tot XIV verstrekken een beeld van de hoeveelheden q_x, $q_x(l)$, q_x (B.V.V.O.) voor volgende leeftijdsintervallen:

$$0 \leqslant x \leqslant 35 \text{ (VII)}; \quad 36 \leqslant x \leqslant 51 \text{ (VIII)};$$

$$52 \leqslant x \leqslant 67 \text{ (IX)}; \quad 68 \leqslant x \leqslant 77 \text{ (X)};$$

$$78 \leqslant x \leqslant 100 \text{ (XI)}; \quad 45 \leqslant x \leqslant 75 \text{ (XII)};$$

$$50 \leqslant x \leqslant 70 \text{ (XIII)}; \quad 65 \leqslant x \leqslant 90 \text{ (XIV)}$$

*

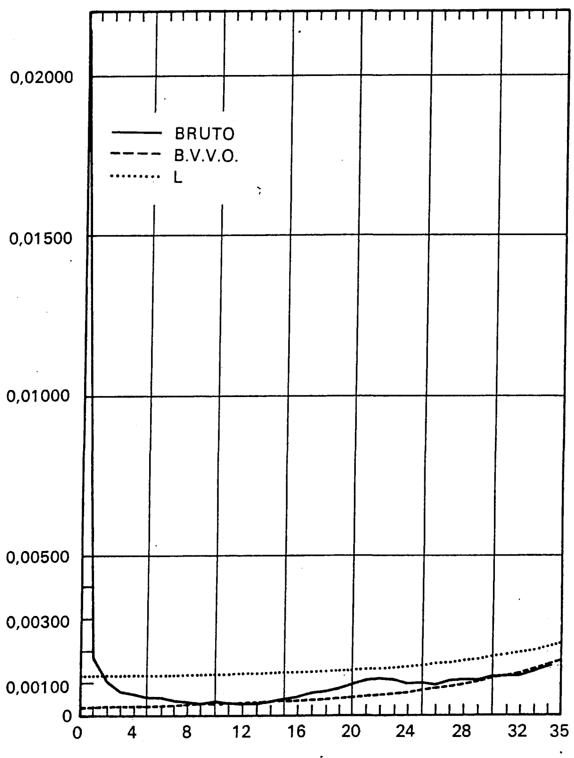
Tabel I.

x	q_x	$q_x(l)$	q_x(B.V.V.O.)	% (l)	% (B.V.V.O.)
0	0.021470	0.001233	0.000266	94.26	98.76
1	0.001790	0.001236	0.000272	30.94	84.82
2	0.001040	0.001240	0.000278	−19.20	73.29
3	0.000750	0.001244	0.000284	−65.81	62.07
4	0.000660	0.001248	0.000292	−89.06	55.78
5	0.000570	0.001253	0.000300	−119.74	47.37
6	0.000570	0.001258	0.000309	−120.66	45.81
7	0.000470	0.001264	0.000319	−168.84	32.20
8	0.000410	0.001270	0.000329	−209.75	19.65
9	0.000360	0.001277	0.000341	−254.75	5.20
10	0.000430	0.001285	0.000354	−198.84	17.61
11	0.000380	0.001294	0.000369	−240.47	3.01
12	0.000370	0.001304	0.000384	−252.30	−3.86
13	0.000370	0.001314	0.000402	−255.21	−8.53
14	0.000430	0.001326	0.000421	−208.43	2.20
15	0.000520	0.001340	0.000441	−157.60	15.11
16	0.000590	0.001354	0.000464	−129.53	21.30

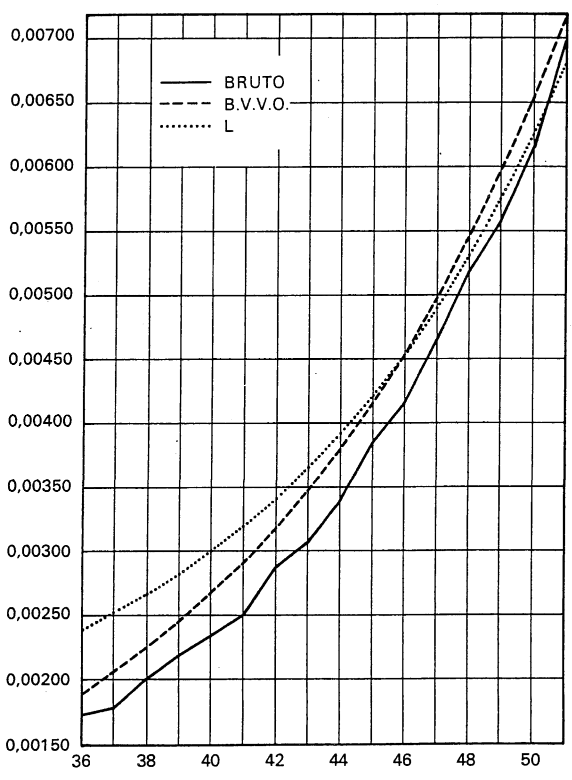
x	q_x	$q_x(l)$	q_x(B.V.V.O.)	% (l)	% (B.V.V.O.)
17	0.000710	0.001371	0.000490	−93.04	31.05
18	0.000770	0.001389	0.000517	−80.35	32.82
19	0.000860	0.001409	0.000548	−63.81	36.31
20	0.000980	0.001431	0.000581	−46.02	40.69
21	0.001110	0.001456	0.000618	−31.14	44.32
22	0.001160	0.001483	0.000659	−27.85	43.23
23	0.001110	0.001513	0.000703	−36.35	36.66
24	0.001000	0.001547	0.000752	−54.72	24.81
25	0.001030	0.001585	0.000806	−53.84	21.78
26	0.000980	0.001626	0.000865	−65.91	11.76
27	0.001100	0.001672	0.000930	−51.99	15.48
28	0.001130	0.001723	0.001001	−52.47	11.41
29	0.001120	0.001779	0.001079	−58.87	3.62
30	0.001230	0.001842	0.001166	−49.76	5.23
31	0.001250	0.001912	0.001260	−52.93	−0.84
32	0.001260	0.001989	0.001365	−57.83	−8.31
33	0.001400	0.002074	0.001479	−48.15	−5.65
34	0.001560	0.002169	0.001605	−39.03	−2.88
35	0.001530	0.002274	0.001743	−48.63	−13.94
36	0.001730	0.002391	0.001895	−38.19	−9.56
37	0.001780	0.002520	0.002062	−41.57	−15.87
38	0.002010	0.002663	0.002246	−32.50	−11.74
39	0.002190	0.002822	0.002448	−28.87	−11.77
40	0.002340	0.002999	0.002670	−28.15	−14.09
41	0.002500	0.003194	0.002913	−27.76	−16.53
42	0.002880	0.003411	0.003181	−18.43	−10.46
43	0.003070	0.003651	0.003476	−18.93	−13.21
44	0.003390	0.003918	0.003799	−15.57	−12.07
45	0.003850	0.004213	0.004155	−9.44	−7.91
46	0.004160	0.004541	0.004545	−9.16	−9.26
47	0.004660	0.004904	0.004974	−5.24	−6.74
48	0.005190	0.005307	0.005446	−2.25	−4.93
49	0.005570	0.005753	0.005964	−3.29	−7.07
50	0.006160	0.006248	0.006533	−1.43	−6.06
51	0.006980	0.006797	0.007158	2.62	−2.56
52	0.007600	0.007405	0.007845	2.57	−3.23
53	0.008440	0.008079	0.008600	4.28	−1.89
54	0.009430	0.008826	0.009428	6.41	0.02
55	0.010110	0.009654	0.010339	4.51	−2.26
56	0.011440	0.010571	0.011338	7.60	0.89
57	0.012700	0.011587	0.012436	8.76	2.08
58	0.013860	0.012713	0.013641	8.27	1.58
59	0.015080	0.013961	0.014964	7.42	0.77
60	0.016690	0.015342	0.016416	8.08	1.64
61	0.017960	0.016872	0.018010	6.06	−0.28
62	0.020060	0.018566	0.019759	7.45	1.50
63	0.021820	0.020442	0.021678	6.32	0.65
64	0.023860	0.022518	0.023783	5.63	0.32
65	0.025840	0.024815	0.026092	3.97	−0.97
66	0.027920	0.027356	0.028623	2.02	−2.52
67	0.030530	0.030167	0.031399	1.19	−2.85
68	0.033300	0.033275	0.034440	0.08	−3.42
69	0.036710	0.036710	0.037773	−0.00	−2.89
70	0.040010	0.040506	0.041422	−1.24	−3.53
71	0.044250	0.044698	0.045418	−1.01	−2.64
72	0.048570	0.049326	0.049792	−1.56	−2.52
73	0.053350	0.054433	0.054576	−2.03	−2.30
74	0.058720	0.060065	0.059807	−2.29	−1.85
75	0.065690	0.066272	0.065524	−0.89	0.25
76	0.073360	0.073108	0.071768	0.34	2.17

x	q_x	$q_x(l)$	q_x(B.V.V.O.)	% (l)	% (B.V.V.O.)
77	0.081380	0.080631	0.078584	0.92	3.44
78	0.088270	0.088903	0.086019	−0.72	2.55
79	0.097600	0.097991	0.094122	−0.40	3.56
80	0.106630	0.107964	0.102946	−1.25	3.45
81	0.116580	0.118896	0.112547	−1.99	3.46
82	0.128510	0.130863	0.122982	−1.83	4.30
83	0.142070	0.143946	0.134311	−1.32	5.46
84	0.156990	0.158226	0.146596	−0.79	6.62
85	0.171400	0.173785	0.159899	−1.39	6.71
86	0.184090	0.190706	0.174283	−3.59	5.33
87	0.205400	0.209067	0.189810	−1.79	7.59
88	0.214120	0.228943	0.206542	−6.92	3.54
89	0.233720	0.250405	0.224535	−7.14	3.93
90	0.250960	0.273509	0.243844	−8.99	2.84
91	0.270600	0.298302	0.264515	−10.24	2.25
92	0.287100	0.324811	0.286586	−13.14	0.18
93	0.301010	0.353041	0.310083	−17.28	−2.98
94	0.324740	0.382973	0.335021	−17.93	−3.17
95	0.336550	0.414553	0.361394	−23.18	−7.38
96	0.336600	0.447690	0.389180	−33.00	−15.62
97	0.380650	0.482253	0.418330	−26.69	−9.90
98	0.372580	0.518062	0.448771	−39.05	−20.45
99	0.364380	0.554889	0.480397	−52.28	−31.84

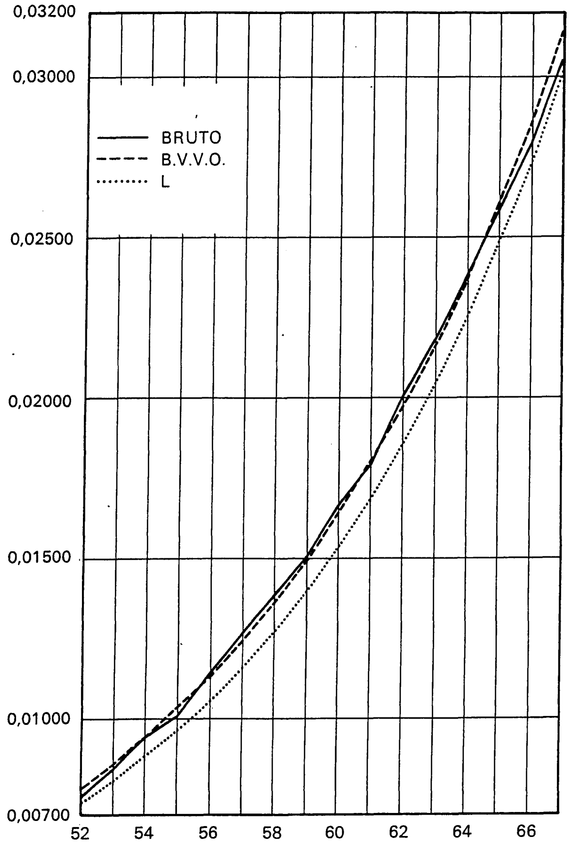
GRAFIEK VII.



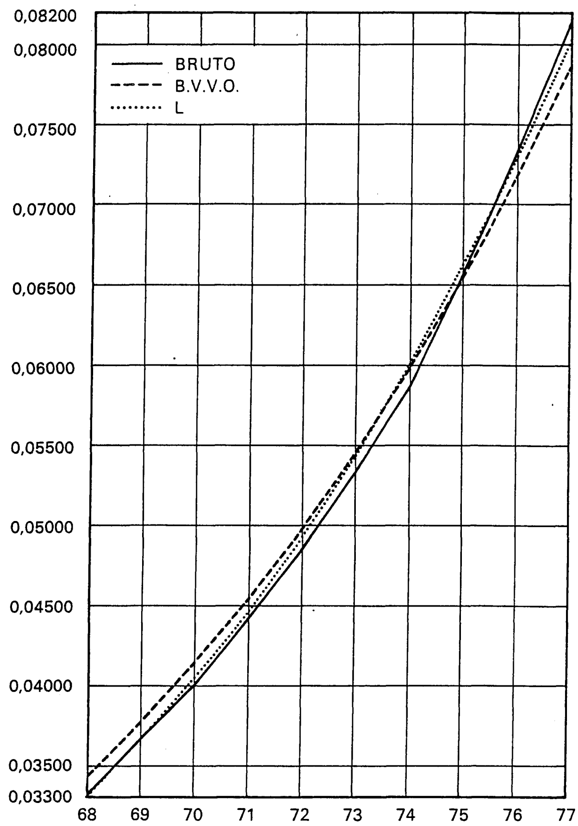
GRAFIEK VIII.



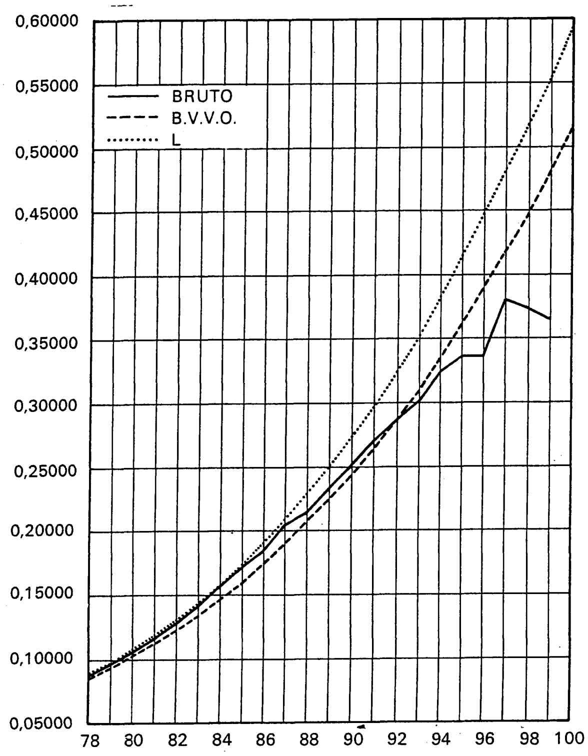
GRAFIEK IX.



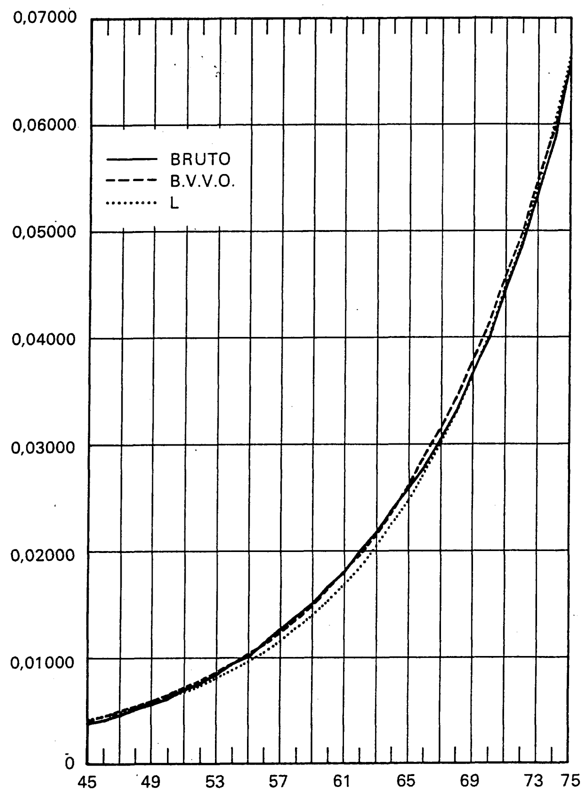
GRAFIEK X.



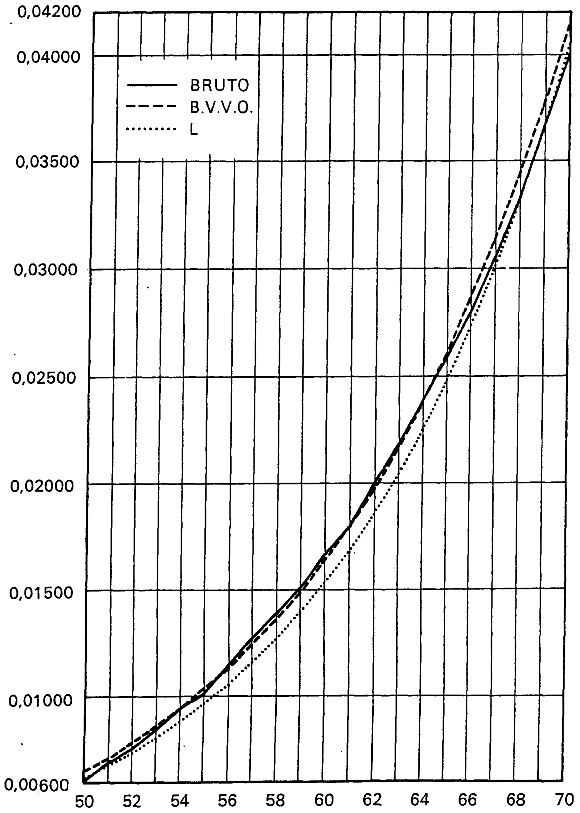
GRAFIEK XI.



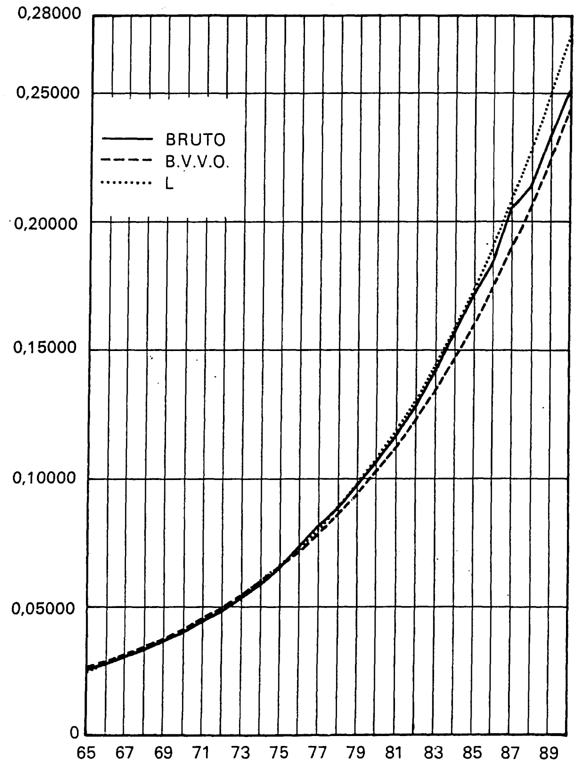
GRAFIEK XII.



GRAFIEK XIII.



GRAFIEK XIV.



c. *Actuariële analyse van de afronding van het aantal overlevenden en van de geïnduceerde sterftekans-afronding.*

Voor de verzekeringsdoeleinden moet een bruto-sterftetafel die men wenst af te ronden overeenstemmen met de mortaliteit van de verzekerden. Dit is niet noodzakelijk het geval voor de bruto-sterftetafels die uit de algemene volkstellingen worden afgeleid. Het kan alsdan raadzaam zijn de bruto-sterftetafels te wijzigen (1) om dit euvel te verhelpen.

Om zowel de toevallige afwijkingen als de gevolgen van een ongunstige evolutie van de mortaliteit te voorkomen, is het nodig dat de mortaliteitselementen van de tarieven een zekere veiligheidsmarge inhouden. Deze veiligheidsmarge kan worden ingevoerd, hetzij impliciet door een aanpassing van het sterftecijfer, hetzij expliciet door een bijkomende toeslag (inwerking op de q_x) of leeftijdscorrecties (inwerking op de x), zonder afbreuk te doen aan de selectieregels die in principe slechts erbij worden betrokken naar gelang van de reeds aangenomen cijfers.

(1) Men zou deze wijzigingen kunnen aanbrengen op grond van de gegevens die door de verzekeringsondernemingen worden medegedeeld aan de overheid die met de controle belast is.

De explicietvorm is veruit de beste, omdat het verschil tussen de sterftecijfers voor en na de correctie erdoor voor de geest kan blijven.

Wij interesseren ons dus enkel voor de sterftetafel zonder veiligheidstoeslag.

Opdat een afronding van deze tafel uit actuarieel standpunt zou voldoen, moeten er in principe twee voorwaarden zijn vervuld:

i — Indien uit statistisch oogpunt, de afwijkingen met dezelfde absolute waarde maar met tegengesteld teken als gelijkwaardig mogen worden beschouwd geldt dit niet op het actuariële vlak: zelfs een lichte ondertarifering brengt grotere nadelen mee dan een overtarifering van dezelfde grootte.

Dit heeft voor gevolg dat, bij vergelijkbare statistische kwaliteit, een afronding in de zin van veiligheid verkiesbaar is boven een adjustering met tegengestelde karakteristieken. Dit is hetgeen wij de *veiligheidsvoorwaarde* noemen die men niet mag verwarren met een impliciete veiligheidstoeslag die niet hetzelfde doel nastreeft, en vooral niet dezelfde numerieke belangrijkheid heeft.

ii — Teneinde zoveel mogelijk de equiteit onder de verzekerden te bewaren moet men vermijden dat de afwijkingen systematisch voorkomen over een te groot interval ook al is dit wel zo, in tegenovergestelde zin, op andere belangrijke intervallen. Dit noemen wij de *regelmatigheidsvoorwaarde.*

Bij ontstentenis van elke opgelegde analytische vorm van de functie l_x valt de regelmatigheidsvoorwaarde praktisch samen met de statistische betrouwheid en heeft de veiligheidsvoorwaarde geen zin meer.

Daarentegen gaat dit niet langer op wanneer de bruto-mortaliteit, zelfs na eliminatie van de toevallige afwijkingen, enigszins afwijkt van een theoretische mortaliteit zoals bijv. door de wet van Makeham wordt voorgesteld.

Tussen adjusteringen met ongeveer dezelfde statistische kwaliteiten en waarvoor de regelmatigheidsvoorwaarde, rekening houdend met de analytische vereisten, voldoende is vervuld, zal men in de praktijk de voorkeur geven aan de afrondingen waarbij de veiligheidsvoorwaarde in acht genomen is althans voor de uit actuarieel oogpunt belangrijkste leeftijden. Dit noemen wij de *gunstige-compensatievoorwaarde.*

*

Uit de bruto-sterftetafel M + V (1959-1963) is de volgens het schema van Makehan afgeronde tafel M + V (1959-63)M_k [2] ontstaan die wordt gebruikt bij de berekening van de bij Koninklijk Besluit van 30 september 1968 opgelegde minimumreserves en in de daarmee overeenstemmende tarieven voor de verrichtingen uit de tak „leven".

Er mag worden gesteld dat voor die verrichtingen en voor de verzekerden tussen 5 en 70 jaar (zelfs een weinig ouder, d.w.z. in feite tot de uiterste leeftijd voor verrichtingen in de tak „leven", behalve de niet-tijdelijke lijfrenten)bedoelde bruto-sterftetafel beantwoordt aan de veiligheidsvoorwaarde.

De geïnduceerde afronding van de q_x op basis van de optimale adjustering van de l_x, is vanzelfsprekend, wat de veiligheid betreft, sterk gebrekkig onder de leeftijd van 50 jaar en wat de regelmatigheid aangaat voor het interval $5 \leqslant x \leqslant 70$.

Op het eerste gezicht, lijkt de kwaliteit van deze afronding dus minderwaardig in vergelijking met de B.V.V.O. adjustering. Hierbij mogen evenwel volgenfactoren niet uit het oog worden verloren:

i — bij verrichtingen uit de tak „leven" (hierdoor verstaan we de verschillende verzekeringstypes voor dewelke een vermindering van de sterfte doorgaans een verhoging van de netto premie met zich meebrengt, dit tegenover de verrichtingen voor verzekering bij sterfte), zijn niet de relatieve verschillen t.o.v. de q_x belangrijk, maar wel deze t.o.v. de p_x. Met andere woorden, de verschillen $q_x - q_x^{(l)} = p_x^{(l)} - p_x$ moeten niet met q_x maar met p_x worden gerelateerd. De grote waarden die men bekomt voor $x \leqslant 50$, in de 5^e kolom van tabel 1 krimpen dan tot veel kleinere grootheden.

ii — de regel van de gunstige compensatie speelt aanzienlijk in het voordeel van de geïnduceerde afronding.

Immers, met uitzondering van de dadelijk ingaande lijfrenten hebben de verrichtingen betreffende de tak „leven" bij het ingaan van het contract negatieve risicodragende kapitalen (1) maar lage absolute waarden; bij het einde van het contract, daarentegen, worden die absolute waarden gelijktijdig met de reserve van het contract aanzienlijk groter.

Maar het is precies op de leeftijden die tijdens de laatste periode van het contract worden bereikt dat de q_x van de geïnduceerde afronding gunstige verschillen vertonen. De B.V.V.O.-afronding daarentegen, geeft minder gunstige compensaties: op leeftijden waar de veiligheid secundair is bestaat er een veiligheidsoverschot terwijl er een gebrek aan veiligheid is daar waar ze het belangrijkst is.

Deze conclusies dienen natuurlijk te worden omgekeerd voor de dadelijk ingaande lijfrenten.

Wij stellen in ieder geval vast:

— dat voor de jeugdige leeftijden deze combinaties zeer zeldzaam zijn en dat de sterfteverliezen die gezien de lage verhouding $\frac{q_x}{p_x}$, gering zijn, makkelijk worden gecompenseerd door een zeer enge veiligheidsmarge op de rentevoet.
— dat voor het leeftijdsinterval: $50 \leqslant x \leqslant 70$, de geïnduceerde afronding gunstig is.

Hoe staat het echter in de uiterste intervallen van de tafels?

Men weet dat de adjustering volgens Makeham niet geschikt is voor de eerste leeftijden van de tafel om de goede reden dat het sterftecijfer er afneemt. Dit gebrek aan representativiteit is biometrisch gezien vervelend, maar in het actuariële vlak is dit minder zo omdat de som van de absolute waarden van de risicodragende kapitalen voor die leeftijden onbeduidend is t.o.v. dezelfde som maar dan gespreid over al de leeftijden voor een zelfde portefeuille.

(1) Enkele combinaties hebben bij het ingaan van het contract, positieve risicodragende kapitalen; de veiligheidsvoorwaarde speelt dan volledig in het voordeel van de geïnduceerde afronding.

Erger is het probleem van de eindleeftijden. Voor de verrichtingen „leven", spelen deze leeftijden immers alleen een rol bij combinaties van dadelijk ingaande lijfrenten die trouwens doorgaans op die leeftijd worden afgesloten.

Bij het reeds bestaande verschil tussen het sterftecijfer van de rentetrekkers en het algemene sterftecijfer — gevolg van hun levenswijze —, komt nog de belangrijke anti-selectie.

Bovendien vertonen de afrondingen volgens Makeham en in het bijzonder de bestudeerde geïnduceerde afronding, positieve verschillen tussen de afgeronde en de bruto q_x.

Dit heeft voor gevolg dat elke afronding van de volledige brutotafel, die alleen op een formule van Makeham steunt, hoegenaamd niet overeenstemt met de mortaliteit die in verband met verrichtingen van de tak „leven" op hoge leeftijden wordt waargenomen.

Voor die leeftijden en verrichtingen dient dus te worden gezocht naar specifieke wetten.

3. — Optimale afronding — in de zin der kleinste kwadraten en volgens het schema van Makeham — van de sterftekans op een bepaalde leeftijd „x" van de bruto-sterftetafel M + V (1959-1963).

a. *Methode.*

Men kan de optimale ramingen — in de zin der kleinste kwadraten — van de afrondingsparameters volgens Makeham voor de sterftekans op een bepaalde leeftijd „x" bekomen, door de iteratieve methode van Newton-Raphson.

Aangezien de uitdrukking van de sterftekans in het schema van Makeham uitgaat van drie parameters, leidt dit tot de oplossing van een niet lineaire stelsel met drie onbekenden dat als volgt kan worden geformuleerd:

$$\bar{F}(\bar{P}) = \bar{0}$$

Hierbij is:
— $\bar{P}$ de vector in R^3, waarvan de componenten de oplossing uitmaken van het stelsel;
— en $\bar{F}$ de vector, waarvan de componenten de eerste leden zijn van het op te lossen stelsel van vergelijkingen.

Dit is de iteratieve formule van Newton-Raphson:

$$\bar{P}_{n+1} = \bar{P}_n - [M(\bar{P}_n)]^{-1} [\bar{F}(\bar{P}_n)]$$

Ze vereist bij elke iteratie de oplossing van een lineair stelsel. De bestaansvoorwaarde van de reeks $\bar{P}_n$ vergt dat in ieder punt van deze reeks, inversie van de matrix $[M(\bar{P}_n)]$ mogelijk is.

*

De sterftekans op de leeftijd „x" wordt aldus uitgedrukt:

$$q_x = 1 - sg^{c^{x}(c-1)}$$

en de te minimaliseren som:

$$S = \sum_{x=A}^{x=B} [sg^{c^{x}(c-1)} - p_x^{(b)}]^2$$

waarin $p_x^{(b)}$ de bruto-overlevingskans op de leeftijd „x" voorstelt.

De voorwaarden $\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{\partial S}{\partial g} = \frac{\partial S}{\partial c} = 0$ leiden tot het stelsel van de vergelijkingen der kleinste kwadraten:

$$F_1(s, g, c) = F_2(s, g, c) = F_3(s, g, c) = 0.$$

De elementen van de matrix van Newton-Raphson worden bekomen uit gedeeltelijke van de F_1 afgeleide functies t.o.v. de parameters s, g, c.

* * *

b. *Afronding van het gedeelte van de tafel:* $25 \leqslant x \leqslant 80$.

Uitgaande van de waarden van de parameters van Makeham die bekomen worden door optimale afronding van het aantal overlevenden:

$$s_0 = 0{,}998\ 795\ 409\ 4$$
$$g_0 = 0{,}999\ 737\ 914\ 0$$
$$c_0 = 1{,}109\ 079\ 112\ 4\ ,$$

geeft de iteratieve methode van Newton-Raphson volgende optimale waarden:

$$s^* = 0{,}999\ 430\ 940\ 7$$
$$g^* = 0{,}999\ 629\ 131\ 4$$
$$c^* = 1{,}104\ 696\ 166\ 2$$

Deze waarden stemmen overeen met een sterfte-intensiteit:

$$\mu_x = \alpha + \beta c^{*x},$$

waarbij:

$$\alpha = 0{,}000\ 569\ 221\ 3$$
$$\beta = 0{,}000\ 036\ 934\ 4.$$

Er valt aan te stippen dat:

i — de drie waarden [s^*, g^*, c^*] aanvaardbaar zijn, want:

$$s^* < 1; \quad g^* < 1; \quad c^* > 1.$$

ii — het vereiste aantal iteraties om het optimum te bereiken gelijk is aan 7 (1).

iii — de te minimaliseren som:

$$\sum_{x=25}^{80} [sg^{c^{x(c-1)}} - p_x \text{bruto}]^2$$

in het begin volgende waarde aanneemt:

$$s_0 = 0{,}254 \quad 880 . 10^{-4}$$

en bij het optimum, de waarde:

$$S^* = 0{,}192 \quad 679 . 10^{-4}$$

iv — de eerste leden van de vergelijkingen der kleinste kwadraten aanvankelijk volgende waarden bezitten:

$$F_1(s_0, g_0, c_0) = -\ 0{,}01$$

$$F_2(s_0, g_0, c_0) = -\ 7{,}72$$

$$F_3(s_0, g_0, c_0) = -\ 66{,}78$$

terwijl deze leden bij het optimum volgende waarden aannemen:

$$F_1(s^*, g^*, c^*) = 0{,}6 \cdot 10^{-12}$$

$$F_2(s^*, g^*, c^*) = 0{,}9 \cdot 10^{-9}$$

$$F_3(s^*, g^*, c^*) = 0{,}7 \cdot 10^{-8}$$

v — de som der kwadraten van de verschillen tussen de bruto q_x en de afgeronde q_x gelijk is aan 0,192 679 · 10^{-4}; de som der kwadraten van de verschillen tussen de bruto q_x en de door de B.V.V.O. afgeronde q_x evenwel is gelijk aan 0,547 090 · 10^{-4}.

vi — de twee afrondingen samengevat mogen worden door de ongelijkheden:

$$\sum_{x=25}^{80} (l_x - l_x \text{bruto})^2 = 0{,}149\ 482 \cdot 10^9$$

$$< \sum_{x=25}^{80} (l_x \text{B.V.V.O.} - l_x \text{bruto})^2 = 0{,}261\ 616 \cdot 10^9$$

$$\sum_{x=25}^{80} (q_x - q_x \text{bruto})^2 = 0{,}192\ 679 \cdot 10^{-4}$$

$$< \sum_{x=25}^{80} (q_x \text{B.V.V.O.} - q_x \text{bruto})^2 = 0{,}547\ 090 \cdot 10^{-4}$$

$$\sum_{x=25}^{80} \left| l_x - l_x \text{bruto} \right| = 0{,}893\ 251 \cdot 10^5$$

$$< \sum_{x=25}^{80} \left| l_x \text{B.V.V.O.} - l_x \text{bruto} \right| = 0{,}114\ 673 \cdot 10^6$$

$$\sum_{x=25}^{80} \left| q_x - q_x \text{bruto} \right| = 0{,}025\ 081$$

$$< \sum_{x=25}^{80} \left| q_x \text{B.V.V.O.} - q_x \text{bruto} \right| = 0{,}032\ 491$$

*

In tabel II worden de waarden gegeven van:

x : leeftijd

q_x : bruto-sterftekans op de leeftijd „x"

q_x^* : geadjusteerde sterftekans op de leeftijd „x"

q_x(B.V.V.O.) : door de B.V.V.O. geadjusteerde sterftekans

% : betrekkelijk verschil in % tussen q_x en q_x^*

$$\% = \frac{q_x - q_x^*}{q_x} \cdot 100$$

%(B.V.V.O.) : betrekkelijk verschil in % tussen q_x en q_x(B.V.V.O.)

$$\% \text{ B.V.V.O.} = \frac{q_x - q_x\,(\text{B.V.V.O.})}{q_x} \cdot 100$$

x : leeftijd

De grafieken XV tot XVII illustreren tabel II. Ze stellen de hoeveelheden q_x, q_x^*, q_x(B.V.V.O.) voor respectievelijk in de leeftijdsintervallen:

$$25 \leqslant x \leqslant 45 \text{ (XV)}; \quad 45 \leqslant x \leqslant 65 \text{ (XVI)};$$

$$65 \leqslant x \leqslant 80 \text{ (XVII)}$$

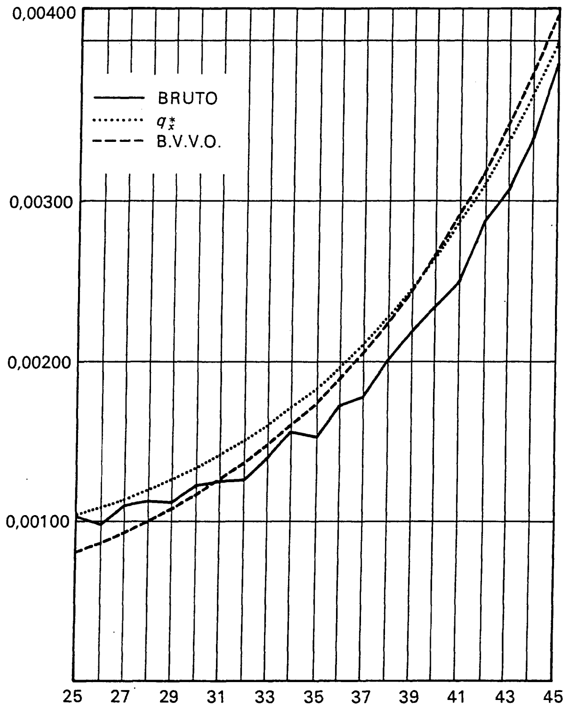
*

(1) Onder optimum moet worden verstaan de drie waarden s_n, g_n, c_n zodat:
$\text{MAX}[|s_n - s_{n-1}|, |g_n - g_{n-1}|, |c_n - c_{n-1}|] < 10^{-9}$.

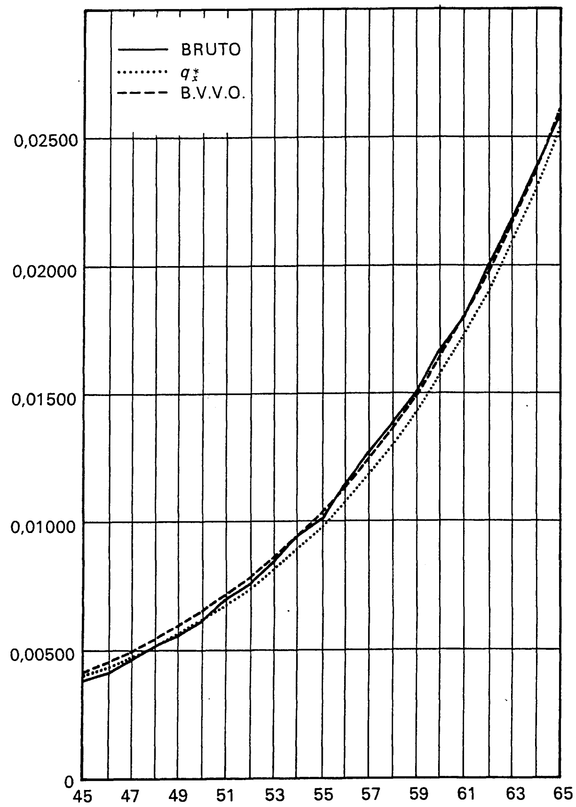
Tabel II.

x	q_x	q_x^*	q_x(B.V.V.O.)	%	% B.V.V.O.	x
25	0.001030	0.001037	0.000806	−0.65	21.78	25
26	0.000980	0.001086	0.000865	−10.79	11.76	26
27	0.001100	0.001140	0.000930	−3.62	15.48	27
28	0.001130	0.001200	0.001001	−6.15	11.41	28
29	0.001120	0.001265	0.001079	−12.99	3.62	29
30	0.001230	0.001338	0.001166	−8.81	5.23	30
31	0.001250	0.001419	0.001260	−13.51	−0.84	31
32	0.001260	0.001508	0.001365	−19.67	−8.31	32
33	0.001400	0.001606	0.001479	−14.72	−5.65	33
34	0.001560	0.001715	0.001605	−9.91	−2.88	34
35	0.001530	0.001834	0.001743	−19.90	−13.94	35
36	0.001730	0.001967	0.001895	−13.69	−9.56	36
37	0.001780	0.002113	0.002062	−18.71	−15.87	37
38	0.002010	0.002275	0.002246	−13.16	−11.74	38
39	0.002190	0.002453	0.002448	−12.00	−11.77	39
40	0.002340	0.002650	0.002670	−13.24	−14.09	40
41	0.002500	0.002868	0.002913	−14.70	−16.53	41
42	0.002880	0.003108	0.003181	−7.91	−10.46	42
43	0.003070	0.003373	0.003476	−9.88	−13.21	43
44	0.003390	0.003666	0.003799	−8.15	−12.07	44
45	0.003850	0.003990	0.004155	−3.64	−7.91	45
46	0.004160	0.004348	0.004545	−4.51	−9.26	46
47	0.004660	0.004742	0.004974	−1.77	−6.74	47
48	0.005190	0.005178	0.005446	0.22	−4.93	48
49	0.005570	0.005660	0.005964	−1.61	−7.07	49
50	0.006160	0.006191	0.006533	−0.51	−6.06	50
51	0.006980	0.006778	0.007158	2.89	−2.56	51
52	0.007600	0.007426	0.007845	2.29	−3.23	52
53	0.008440	0.008141	0.008600	3.54	−1.89	53
54	0.009430	0.008930	0.009428	5.30	0.02	54
55	0.010110	0.009802	0.010339	3.05	−2.26	55
56	0.011440	0.010763	0.011338	5.91	0.89	56
57	0.012700	0.011825	0.012436	6.89	2.08	57
58	0.013860	0.012996	0.013641	6.24	1.58	58
59	0.015080	0.014288	0.014964	5.25	0.77	59
60	0.016690	0.015713	0.016416	5.85	1.64	60
61	0.017960	0.017285	0.018010	3.76	−0.28	61
62	0.020060	0.019019	0.019759	5.19	1.50	62
63	0.021820	0.020931	0.021678	4.07	0.65	63
64	0.023860	0.023039	0.023783	3.44	0.32	64
65	0.025840	0.025362	0.026092	1.85	−0.97	65
66	0.027920	0.027922	0.028623	−0.01	−2.52	66
67	0.030530	0.030742	0.031399	−0.69	−2.85	67
68	0.033300	0.033848	0.034440	−1.64	−3.42	68
69	0.036710	0.037267	0.037773	−1.52	−2.89	69
70	0.040010	0.041030	0.041422	−2.55	−3.53	70
71	0.044250	0.045171	0.045418	−2.08	−2.64	71
72	0.048570	0.049724	0.049792	−2.38	−2.52	72
73	0.053350	0.054728	0.054576	−2.58	−2.30	73
74	0.058720	0.060226	0.059807	−2.56	−1.85	74
75	0.065690	0.066262	0.065524	−0.87	0.25	75
76	0.073360	0.072885	0.071768	0.65	2.17	76
77	0.081380	0.080147	0.078584	1.52	3.44	77
78	0.088270	0.088103	0.086019	0.19	2.55	78
79	0.097600	0.096812	0.094122	0.81	3.56	79
80	0.106630	0.106336	0.102946	0.28	3.45	80

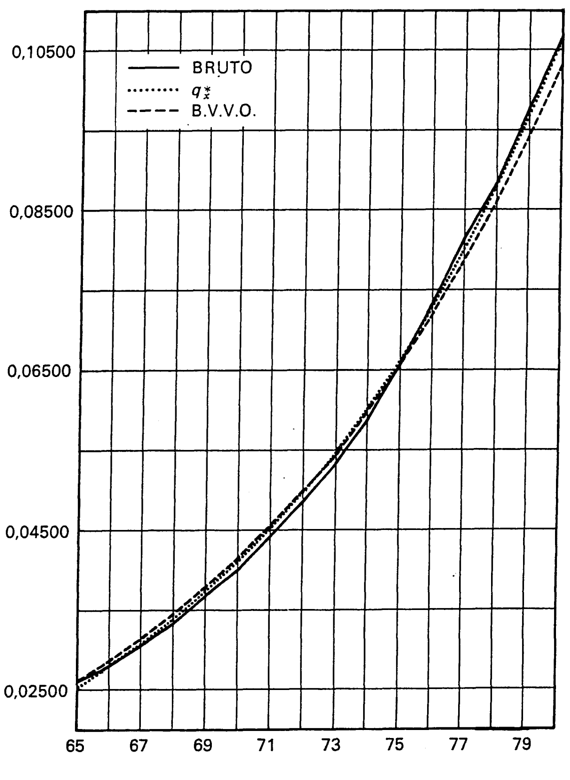
GRAFIEK XV.



GRAFIEK XVI.



GRAFIEK XVII.



3. *Afronding van de gedeelten van de tafel:*

$$15 \leqslant x \leqslant 85 \text{ en } 10 \leqslant x \leqslant 90.$$

i — Waarden van de Makeham-parameters.

De iteratieve methode van Newton-Raphson leidt tot volgende optimale waarden:

$$15 \leqslant x \leqslant 85$$

$$s^* = 0{,}999\ 282\ 713\ 9$$

$$g^* = 0{,}999\ 673\ 001\ 3$$

$$c^* = 1{,}106\ 306\ 751\ 8$$

$$10 \leqslant x \leqslant 90$$

$$s^* = 0{,}999\ 841\ 860\ 8$$

$$g^* = 0{,}999\ 526\ 953\ 8$$

$$c^* = 1{,}101\ 804\ 561\ 3$$

ii — Numeriek resumé van de afronding van die gedeelten en van de B.V.V.O.-afronding voor dezelfde intervallen.

Tabel III.

	$15 \leqslant x \leqslant 85$	B.V.V.O. $15 \leqslant x \leqslant 85$	$10 \leqslant x \leqslant 90$	B.V.V.O. $10 \leqslant x \leqslant 90$
$\Sigma(l_x\text{bruto} - l_x)^2$	0,130 10^9	0,333 10^9	0,487 10^9	0,369 10^9
$\Sigma\,\lvert l_x\text{bruto} - l_x \rvert$	0,919 10^5	0,145 10^6	0,183 10^6	0,162 10^6
$\Sigma(q_x,\text{bruto} - q_x)^2$	0,000 025 4	0,000 403 1	0,000 166	0,000 935
$\Sigma\,\lvert q_x\text{bruto} - q_x \rvert$	0,032 7	0,074 7	0,060 4	0,124 2

Tabel III geeft voor de afrondingen van de gedeelten $15 \leqslant x \leqslant 85$ en $10 \leqslant x \leqslant 90$, en voor de B.V.V.O.-afrondingen van dezelfde intervallen, de waarde der hoeveelheden:

$$\Sigma(l_x\text{bruto} - l_x)^2\,;\quad \Sigma\left|l_x\text{bruto} - l_x\right|;$$

$$\Sigma(q_x\text{bruto} - q_x)^2\,;\quad \Sigma\left|q_x\text{bruto} - q_x\right|.$$

*

d. *Actuariële analyse.*

De afronding van de tafels op partiële intervallen, in het bijzonder daar waar het reële sterftecijfer het Makeham-type benadert, geeft actuarieel gezien betere resultaten dan de geïnduceerde afronding.

Om eerder aangehaalde redenen elimineren we de uiterste zone. Voor de andere leeftijden stelt men vast dat de veiligheids- en regelmatigheidsvoorwaarden vervuld zijn voor de afrondingen: $25 \leqslant x \leqslant 80$ en $15 \leqslant x \leqslant 85$ en, wat meer is, dat de gunstige-compensatie-regel die reeds in acht was genomen bij de geïnduceerde afronding nog beter tot zijn recht komt voor de twee voornoemde adjusteringen, vooral dan voor de tweede.

Daarom geven wij een lichte voorkeur aan deze laatste, ook al zijn de statistische criteria iets minder vervuld dan in de afronding: $25 \leqslant x \leqslant 80$.

Daarentegen zijn de grenzen van de adjustering $10 \leqslant x \leqslant 90$ vermoedelijk slecht gekozen (vooral de bovengrens) zodat deze afronding als ongunstig mag worden beschouwd, zowel in vergelijking met deze van de B.V.V.O. als ten opzichte van $25 \leqslant x \leqslant 80$ en $15 \leqslant x \leqslant 85$ en gedeeltelijk zelfs tegenover de geïnduceerde afronding.

* * *

4. — **Besluiten.**

Vanuit actuarieel oogpunt gaat het niet op deze of gene afronding als goed of slecht te bestempelen, vooral omdat de door middel van de vijf afrondingen bekomen verschillen tussen de actuariële waarden tamelijk laag blijven (1).

Er is evenmin sprake van één van deze afrondingen in de plaats te stellen van de adjustering die wordt gebruikt in de aan de gang zijnde verrichtingen.

De huidige studie zou evenwel haar nut kunnen bewijzen bij de afronding van de bruto-sterftetafels M, V, M + V (1968-1972) op basis van de gegevens uit de telling van 1970.

---

(1) Ter illustratie is in bijlage een tabel opgenomen met de waarde van ${}_nE_x$ voor $10 \leqslant n \leqslant 40$, $\Delta_n = 10$ en voor de vijf bestudeerde afrondingen.

Zoals men reeds kon verwachten tonen de diverse bestudeerde afrondingen aan dat geen enkele adjustering volgens het schema van Makeham, terzelfdertijd en volledig de zekerheids- en regelmatigheidsvoorwaarden en de gunstige-compensatie-regel kan waar maken.

De wet van het reële sterftecijfer strookt inderdaad slechts gebrekkig (voor bepaalde leeftijden zeer slecht) met de wet van Makeham, wat onvermijdelijk min of meer grove fouten in de regelmaat meebrengt. Anderzijds strekt optimalisatie van de afronding ertoe de verschillen tussen de bruto q_x en de afgeronde q_x onafhankelijk van hun teken, zo veel mogelijk te drukken hetgeen over het algemeen de veiligheidsvoorwaarde in het gedrang brengt. Blijft nog de gunstige-compensatie-regel die binnen bepaalde grenzen zou moeten worden nageleefd, vooral omdat hij, bij tafels die worden gebruikt voor de verrichtingen inzake „overlijden" in dezelfde zin moet spelen als bij tafels m.b.t. de tak „leven" (de dadelijk ingaande lijfrenten uitgezonderd).

Het risicodragend kapitaal bezit doorgaans zijn maximumwaarde bij het begin van het contract (sterk positief voor de verrichtingen inzake „overlijden", licht positief of negatief voor de verrichtingen van het type „leven") en zijn minimumwaarde aan het einde van het contract (licht positief of negatief voor de verrichtingen van het type „overlijden", sterk negatief voor de verrichtingen van het type „leven").

Dit betekent dat de q_x bij het begin van het contract door overdrijving zouden moeten worden benaderd voor de „overlijden"-verrichtingen zonder dat deze verplichting — en alleszins niet in dezelfde mate — ook aan het einde van het contract zou gelden.

Voor de verrichtingen van het type „leven" (uitgezonderd dadelijk ingaande lijfrenten) daarentegen, zouden de q_x door onderschatting moeten worden benaderd aan het einde van het contract ook al geldt dit niet — of niet in dezelfde mate — bij het begin van het contract.

De gunstige-compensatie-regel speelt in dezelfde zin voor beide groepen verrichtingen door een grotere spreiding in de respectieve afgeronde tafels dan in de niet geadjusteerde tafel, d.w.z. dat de functie $\frac{\mu'_x}{\mu_x}$ iets kleiner is — althans wat de eerste helft van de tafel betreft — in de afgeronde dan in de overeenkomstige niet geadjusteerde tafels.

Dienaangaande geeft tabel IV de verschillende waarden van deze functie voor de volgende afrondingen.:

B.V.V.O. $q_x(25 \leqslant x \leqslant 80)$ $q_x(15 \leqslant x \leqslant 85)$.

Tabel IV.

x	B.V.V.O.	q_x $25 \leqslant x \leqslant 80$	q_x $15 \leqslant x \leqslant 85$
1	0.020635	0.006660	0.004897
2	0.022203	0.007306	0.005390
3	0.023851	0.008009	0.005929
4	0.025578	0.008774	0.006519
5	0.027381	0.009604	0.007163
6	0.029258	0.010503	0.007865
7	0.031204	0.011476	0.008630
8	0.033214	0.012527	0.009461
9	0.035281	0.013658	0.010364
10	0.037399	0.014875	0.011342
11	0.039558	0.016179	0.012399
12	0.041752	0.017574	0.013541
13	0.043970	0.019061	0.014770
14	0.046202	0.020643	0.016090
15	0.048440	0.022320	0.017504
16	0.050673	0.024092	0.019015
17	0.052891	0.025956	0.020623
18	0.055084	0.027912	0.022331
19	0.057243	0.029955	0.024138
20	0.059360	0.032081	0.026043

x	B.V.V.O.	q_x $25 \leqslant x \leqslant 80$	q_x $15 \leqslant x \leqslant 85$
21	0.061426	0.034283	0.028043
22	0.063435	0.036555	0.030135
23	0.065381	0.038887	0.032313
24	0.067257	0.041271	0.034573
25	0.069060	0.043696	0.036906
26	0.070786	0.046150	0.039303
27	0.072433	0.048623	0.041754
28	0.073999	0.051101	0.044249
29	0.075485	0.053572	0.046775
30	0.076888	0.056025	0.049320
31	0.078211	0.058448	0.051871
32	0.079455	0.060829	0.054415
33	0.080622	0.063157	0.056939
34	0.081713	0.065425	0.059432
35	0.082732	0.067623	0.061880
36	0.083681	0.069744	0.064273
37	0.084563	0.071781	0.066601
38	0.085382	0.073732	0.068856
39	0.086141	0.075591	0.071029
40	0.086844	0.077356	0.073116
41	0.087493	0.079027	0.075110
42	0.088092	0.080603	0.077008
43	0.088644	0.082085	0.078808
44	0.089152	0.083475	0.080510
45	0.089619	0.084773	0.082112
46	0.090049	0.085984	0.083617
47	0.090443	0.087111	0.085025
48	0.090805	0.088156	0.086339
49	0.091136	0.089125	0.087562
50	0.091440	0.090020	0.088698
51	0.091718	0.090845	0.089751
52	0.091973	0.091606	0.090724
53	0.092206	0.092306	0.091622
54	0.092418	0.092949	0.092449
55	0.092613	0.093538	0.093209
56	0.092790	0.094078	0.093907
57	0.092952	0.094573	0.094548
58	0.093100	0.095025	0.095134
59	0.093235	0.095438	0.095670
60	0.093359	0.095815	0.096160
61	0.093471	0.096158	0.096607
62	0.093573	0.096472	0.097015
63	0.093667	0.096757	0.097387
64	0.093752	0.097017	0.097725
65	0.093829	0.097253	0.098033
66	0.093900	0.097468	0.098313
67	0.093964	0.097664	0.098568
68	0.094023	0.097841	0.098799
69	0.094076	0.098002	0.099009
70	0.094125	0.098149	0.099199
71	0.094169	0.098282	0.099372
72	0.094210	0.098403	0.099529
73	0.094246	0.098512	0.099671
74	0.094280	0.098611	0.099799
75	0.094310	0.098701	0.099916
76	0.094338	0.098783	0.100022
77	0.094363	0.098857	0.100118
78	0.094386	0.098924	0.100204
79	0.094407	0.098985	0.100283
80	0.094426	0.099040	0.100354

x	B.V.V.O.	q_x $25 \leqslant x \leqslant 80$	q_x $15 \leqslant x \leqslant 85$
81	0.094443	0.099090	0.100418
82	0.094459	0.099136	0.100476
83	0.094473	0.099177	0.100529
84	0.094487	0.099214	0.100577
85	0.094498	0.099248	0.100620
86	0.094509	0.099278	0.100659
87	0.094519	0.099306	0.100694
88	0.094528	0.099331	0.100726
89	0.094536	0.099353	0.100755
90	0.094543	0.099374	0.100781
91	0.094550	0.099392	0.100805
92	0.094556	0.099409	0.100826
93	0.094562	0.099425	0.100845
94	0.094567	0.099438	0.100863
95	0.094572	0.099451	0.100879
96	0.094576	0.099462	0.100893
97	0.094580	0.099472	0.100906
98	0.094583	0.099482	0.100917
99	0.094586	0.099490	0.100928
100	0.094589	0.099498	0.100937

De gunstige-compensatie-regel bij afronding is zoniet noodzakelijk dan toch nuttig; voldoende is hij evenwel niet.

De afronding volgens het schema van Makeham, samen met andere methodes, is slechts een analytische adjustering met als voornaamste (1) opzet uit de niet-afgeronde tafel de toevallige onregelmatigheden weg te werken die verhinderen dat ze zomaar kan worden gebruikt; ze moet zo dicht mogelijk aansluiten bij de niet-afgeronde tafel en, zo mogelijk, eerder de kwaliteiten dan de tekortkomingen accentueren.

Een gebrek aan overeenstemming tussen enerzijds de sterfte van de bevolking waaruit de bruto tafel is afgeleid en anderzijds deze van de verzekerden, kan geëlimineerd worden uitgaande van de bruto q_x welke op de gepaste manier verbeterd werden, door een bewerking die niet noodzakelijk van analytische aard hoeft te zijn, aangezien desnoods nog een definitieve afronding kan gebeuren.

Men kan reeds vermoeden dat de jongste sterftecijfers voor de globale bevolking zullen wijzen op een gevoelige vertraging die kan doorslaan tot stilstand of voor enkele leeftijdszones zelfs een zekere achteruitgang kan betekenen. Men zou zich dus moeten verwachten aan een grotere spreiding van de mortaliteit dan in de huidige tafels.

Indien de wet van Makeham eventueel wordt aangehouden voor de definitieve afronding, zou hij dus deze spreiding moeten in de hand werken en niet omgekeerd.

(1) Daarbij komt het feit dat het bepaalde tariferingen vergemakkelijkt.

*
* *

5. — Bibliografie.

[1] BALLEGEER, Y., *Optimale afronding in de zin der kleinste kwadraten en volgens het schema van Makeham van een gedeelte van een sterftetafel over een bepaald leeftijdsinterval.* Statistisch Tijdschrift, mei 1973 en Statistische Studiën, nummer 32, 1973.

[2] *B.V.V.O.: Referentietarief: Commutaties, Koopsommen en Annuïteiten* - M + V (1959-63)M_k 4% 1 hoofd (15.9.1968).

[3] FRERE, R., *Ajustement de la fonction de Makeham aux tables de mortalité brute* (B.A.R.A.B.-1968).

Bijlage.

x	q_x $25 \leqslant x \leqslant 80$	x	q_x $15 \leqslant x \leqslant 85$	x	q_x $10 \leqslant x \leqslant 90$	x	B.V.V.O.	x	l_x^*
					${}_{10}E_x$				
5	0.671030	5	0.670099	5	0.673649	5	0.673185	5	0.666937
10	0.670579	10	0.669683	10	0.673121	10	0.672605	10	0.666576
15	0.669838	15	0.668993	15	0.672265	15	0.671674	15	0.665971
20	0.668621	20	0.667851	20	0.670876	20	0.670183	20	0.664956
25	0.666623	25	0.665963	25	0.668627	25	0.667798	25	0.663256
30	0.663350	30	0.662845	30	0.664992	30	0.663987	30	0.660413
35	0.657999	35	0.657711	35	0.659131	35	0.657916	35	0.655670
40	0.649289	40	0.649291	40	0.649724	40	0.648288	40	0.647788
45	0.635210	45	0.635573	45	0.634735	45	0.633130	45	0.634773
50	0.612710	50	0.613475	50	0.611129	50	0.609539	50	0.613518
55	0.577413	55	0.578532	55	0.574654	55	0.573500	55	0.579437
60	0.523712	60	0.524951	60	0.520006	60	0.520061	60	0.526447
65	0.446013	65	0.446860	65	0.442121	65	0.444506	65	0.448187
70	0.342455	70	0.342179	70	0.339718	70	0.345507	70	0.342114
75	0.221732	75	0.219863	75	0.221474	75	0.230591	75	0.217445
80	0.108457	80	0.105633	80	0.110570	80	0.120501	80	0.101641
85	0.033444	85	0.031349	85	0.035790	85	0.042524	85	0.028368
90	0.004827	90	0.004187	90	0.005732	90	0.007991	90	0.003333
					${}_{20}E_x$				
5	0.449482	5	0.448292	5	0.452871	5	0.452161	5	0.444161
10	0.448363	10	0.447248	10	0.451581	10	0.450768	10	0.443244
15	0.446530	15	0.445524	15	0.449494	15	0.448542	15	0.441709
20	0.443530	20	0.442682	20	0.446127	20	0.444993	20	0.439145
25	0.438637	25	0.438011	25	0.440713	25	0.439355	25	0.434877
30	0.430706	30	0.430379	30	0.432061	30	0.430455	30	0.427808
35	0.417968	35	0.418024	35	0.418373	35	0.416546	35	0.416202
40	0.397826	40	0.398323	40	0.397065	40	0.395157	40	0.397429
45	0.366779	45	0.367699	45	0.364753	45	0.363100	45	0.367811
50	0.320884	50	0.322044	50	0.317791	50	0.316997	50	0.322984
55	0.257533	55	0.258523	55	0.254067	55	0.254924	55	0.259696
60	0.179348	60	0.179627	60	0.176656	60	0.179685	60	0.180105
65	0.098895	65	0.098248	65	0.097919	65	0.102499	65	0.097456
70	0.037142	70	0.036145	70	0.037563	70	0.041634	70	0.034773
75	0.007416	75	0.006892	75	0.007927	75	0.009806	75	0.006169
80	0.000524	80	0.000442	80	0.000634	80	0.000963	80	0.000339
					${}_{30}E_x$				
5	0.299635	5	0.298545	5	0.302802	5	0.301952	5	0.294592
10	0.297422	10	0.296456	10	0.300298	10	0.299304	10	0.292724
15	0.293816	15	0.293026	15	0.296276	15	0.295103	15	0.289615
20	0.287979	20	0.287429	20	0.289860	20	0.288484	20	0.284473
25	0.278627	25	0.278388	25	0.279736	25	0.278169	25	0.276048
30	0.263898	30	0.264027	30	0.264045	30	0.262379	30	0.262468
35	0.241340	35	0.241840	35	0.240420	35	0.238889	35	0.241163
40	0.208346	40	0.209100	40	0.206476	40	0.205506	40	0.209225
45	0.163588	45	0.164310	45	0.161265	45	0.161400	45	0.164848
50	0.109888	50	0.110197	50	0.107959	50	0.109525	50	0.110497
55	0.057103	55	0.056839	55	0.056269	55	0.058783	55	0.056470
60	0.019452	60	0.018975	60	0.019533	60	0.021652	60	0.018306
65	0.003307	65	0.003080	65	0.003505	65	0.004359	65	0.002765
70	0.000179	70	0.000151	70	0.000215	70	0.000333	70	0.000116

x	q_x $25 \leqslant x \leqslant 80$	x	q_x $15 \leqslant x \leqslant 85$	x	q_x $10 \leqslant x \leqslant 90$	x	B.V.V.O.	x	l_x^*
					${}_{40}E_x$				
5	0.197159	5	0.196357	5	0.199586	5	0.198659	5	0.193155
10	0.193113	10	0.192486	10	0.195111	10	0.194035	10	0.189623
15	0.186635	15	0.186240	15	0.188057	15	0.186839	15	0.183840
20	0.176447	20	0.176331	20	0.177142	20	0.175842	20	0.174525
25	0.160883	25	0.161056	25	0.160751	25	0.159530	25	0.159953
30	0.138206	30	0.138601	30	0.137305	30	0.136453	30	0.138175
35	0.107641	35	0.108069	35	0.106295	35	0.106188	35	0.108086
40	0.071349	40	0.071550	40	0.070144	40	0.071004	40	0.071579
45	0.036273	45	0.036126	45	0.035716	45	0.037217	45	0.035845
50	0.011918	50	0.011640	50	0.011937	50	0.013198	50	0.011231
55	0.001910	55	0.001782	55	0.002014	55	0.002500	55	0.001602
60	0.000094	60	0.000079	60	0.000112	60	0.000173	60	0.000061

ENKELE VROEGER VERSCHENEN STUDIËN

— De Belgische input-outputrelaties 1959 (3 delen), algemene beschrijving van de berekeningsmethode, finale vraag tegen aankoopprijs en investeringen per bedrijfstak, technische coëfficiënten en de inverse matrix.

STATISTISCHE STUDIËN (1)

Nr 1 — Analyse van de vraag op grond der Belgische Gezinsbudgetenquêtes van 1948-1949 en 1956-1957.

Nr 2 — Groei van het nationaal inkomen van 1948 tot 1959 en vooruitzichten op deze basis voor de komende jaren.
— De gezinsuitgaven voor vaste brandstoffen, elektriciteit en stadsgas van 1948 tot 1959.
— De prijs- en inkomenselasticiteiten van de vraag der gezinnen naar steenkolen, gas en elektriciteit volgens de tijdreeksen 1948-1959 — Vooruitzichten inzake gezinsverbruik voor 1965.

Nr 3 — Enkele aspekten van de nauwkeurigheid van ramingen gebaseerd op de gezinsbudgetenquêtes.
— Verdeling over provincies en taalstreken van de toegevoegde waarde per bedrijfstak en het totale binnenlandse produkt.

Nr 4 — De nationale rekeningen van België 1953-1962.

Nr 5 — Gezinsbudgetonderzoek 1961 — Beschrijving van de methode — Inkomen, consumptie en besparingen voor tien sociale groepen.

Nr 6 — De toegevoegde waarde per bedrijfstak en per werknemer in de verschillende provincies en taalstreken van 1955 tot 1959.
— Evolutie van de industriële concentratie, verschillen in rendement, de bezoldigingen, de toegevoegde waarde en de investeringen volgens de dimensie van de industriële inrichtingen.

Nr 7 — Gezinsbudgetonderzoek 1961 — Structuur van het gezinsbudget volgens gezinslasten en volgens taalstreken — Onderzoek naar het representatief karakter van het gezinsbudgetonderzoek.

Nr 8 — De nationale rekeningen van België 1953-1963 — Hoofdlijnen van de ontwikkeling.

Nr 9 — Gezinsbudgetonderzoek 1961 — Structuur van het budget volgens grootteklassen van de gemeenten en de bedrijfstak waarin het gezinshoofd tewerkgesteld is —Structuur van het budget voor gezinnen die spaarden enerzijds en die ontspaarden anderzijds.

Nr 10 — De herziening 1964 van de index van de industriële produktie.
— Produktie-indexcijfers van intermediaire-, consumptie- en investeringsgoederen.
— Ontbinding van tijdreeksen in hun componenten volgens diverse methoden — Toepassing op enkele Belgische reeksen.

Nr 11 — De nationale rekeningen van België 1953-1964 — Overzicht van de economische en sociale ontwikkeling.

Nr 12 — Economische groei van provincies en taalstreken 1955-1963.

Nr 13 — De nuationale rekeningen van België 1953-1965.

Nr 14 — Huidige stand van de regionale statistiek.
— Exportgerichtheid van de verschillende provincies en taalstreken.
— Regionale verdeling van het nationaal inkomen in 1961.
— Economische groei van de provincies en taalstreken van 1962 tot 1964.

Nr 15 — Tewerkstelling en arbeidsvergoeding per industriële bedrijfstak in provincies en taalstreken van 1955 tot 1964.

Nr 16 — De nationale rekeningen van België 1953-1966.

Nr 17 — Typologie van de Belgische gemeenten naar graad van de verstedelijking op 31 december 1961.
— Vergelijking der gezinsbudgetenquêtes gehouden bij arbeiders- en bediendengezinnen in 1961 en 1963.

Nr 18 — Verdeling over provincies en taalstreken van de toegevoegde waarde per bedrijfstak en van het totaal binnenlands produkt — jaren 1965 en 1966.
— Regionale indexcijfers van de industriële produktie basis 1964 = 100).
— Hervorming van het indexcijfer der kleinhandelsprijzen.

Nr 19 — De nationale rekeningen van België 1963-1967.

Nr 20 — De nationale rekeningen van België 1965-1968.

Nr 21 — De nationale rekeningen van België 1953-1969.

Nr 22 — Input-outputtabel van België voor 1965.

Nr 23 — Economische groei van de provincies en taalstreken van 1965 tot 1968.
— Exportgerichtheid van de verschillende provincies en taalstreken. — Jaren 1966 tot 1968.

Nr 24 — Naar een uitbreiding van de nationale rekeningen.

(1) De nummers 1 tot en met 14 zijn verschenen onder de titel « Statistische en Econometrische Studiën ».