études statistiques

numéro 35

1975

TABLES DE MORTALITÉ 1968-1972

INSTITUT NATIONAL DE STATISTIQUE

MINISTÈRE DES AFFAIRES ÉCONOMIQUES

ROYAUME DE BELGIQUE

D/1975/0496/1

ROYAUME DE BELGIQUE
MINISTÈRE DES
AFFAIRES ÉCONOMIQUES

INSTITUT NATIONAL DE STATISTIQUE

ETUDES STATISTIQUES

NUMÉRO 35 1975

EN VENTE A
L'INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE
44, RUE DE LOUVAIN, BRUXELLES
AU PRIX DE 65 F LE NUMERO, AU COMPTE
000 - 0082826 - 85

AVANT-PROPOS.

La publication de nouvelles tables de mortalité constitue toujours un événement important, tant pour ses applications dans le domaine démographique, que pour celles dans les domaines économique et social.

Le recensement de la population belge au 31 décembre 1970 a permis l'établissement des tables de mortalité pour le Royaume et pour la période 1968-1972. Elles sont présentées dans cette brochure où l'on trouvera une étude scindée en deux parties; la première a pour objet l'évolution de la mortalité en Belgique pour la période 1959-1972; la seconde présente des ajustements des nouvelles tables brutes, destinés à des fins actuarielles.

La présente publication met en relief le phénomène de tassement de la mortalité en Belgique et une modification dans la structure de la mortalité masculine. Ces éléments constituent un apport important à la connaissance de la mortalité dans notre pays.

De plus, des ajustements destinés à des fins actuarielles, sont présentés; les utilisateurs trouveront deux ajustements de la table de mortalité de la population masculine et un ajustement de la table de mortalité de la population entière. Ces différents ajustements constituent un outil de travail très important pour les actuaires.

*

La conception et la réalisation de cette étude sont dues à Monsieur Yves BALLEGEER. Pour l'établissement des tables brutes, il a bénéficié du concours de Monsieur André SCHOBBENS. Les ajustements proposés dans la seconde partie ont été calculés avec la collaboration de Monsieur Jean-Pierre ANDRE-DUMONT.

*

Monsieur le Professeur G. WUNSCH et Mademoiselle C. WATTELAR ont bien voulu faire part de leurs remarques et suggestions en ce qui concerne la première partie de l'ouvrage; Monsieur P. BAERT a bien voulu en faire de même, pour la seconde. Je les remercie pour leur collaboration.

R. DEREYMAEKER

Directeur Général de
l'Institut national de Statistique.

TABLE DES MATIERES.

(1) Extrait du «*Bulletin de Statistique*» n° 3, 1975.
(2) Extrait du «*Bulletin de Statistique*» n° 11-12, 1974.

TABLES DE MORTALITE 1968-1972.

I. Tables de mortalité brutes 1968-1972 Evolution de la mortalité en Belgique pour la période 1959-1972

1. — Introduction.

Cet article se propose de caractériser quelques (1) aspects de l'évolution de la mortalité belge pour la période 1959-1972, à partir d'une étude basée sur deux tables de mortalité du moment, centrées sur des recensements. La première est la table de mortalité 1959-1963 centrée sur le recensement de la population belge au 31 décembre 1961; la seconde est la table de mortalité 1968-1972 centrée sur le recensement effectué au 31 décembre 1970.

Cette étude ne fait pas appel à la table de mortalité 1963-1966 calculée par l'Institut national de Statistique, à partir des structures par âge et par sexe recensées en 1961, des décès, des naissances et des migrations annuelles. En effet, les migrations par âge ont biaisé quelque peu la structure de la population. Introduire les éléments de cette table aurait eu pour conséquence d'hétérogénéiser les données démographiques utilisées; dans ce cas, en effet, certaines données auraient été issues de recensements, d'autres de calculs (2).

* * *

(1) C'est ainsi que l'aspect: mortalité par causes n'a pas été retenu.

(2) Ces calculs ont été menés à titre purement indicatif; ils n'ont d'ailleurs jamais été publiés par l'I.N.S.

2. — Notations.

x	âge en années exactes.
$\underline{x}$	âge en années révolues.
${}_tq_x$	probabilité de décès à l'âge x, pour un intervalle de t années.
${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$	probabilité de survie à l'âge x, pour un intervalle de t années.
$q_x \equiv {}_1q_x$	probabilité de décès à l'âge x, pour un intervalle de une année.
$p_x \equiv {}_1p_x$	probabilité de survie à l'âge x, pour un intervalle de une année.
l_x	nombre de survivants à l'âge x.
$d_x = l_x - l_{x+1}$	nombre de décès à l'âge x.
T_x	variable aléatoire égale au restant de la durée de vie d'une tête d'âge x. $0 < T_x < \infty$, ou $0 \leqslant T_x \leqslant \Omega : l_\Omega = 0$.
$F_{T_x}(t) = {}_tq_x$	fonction de répartition de la variable aléatoire T_x, ou probabilité de décès à l'âge x, pour un intervalle de t années.
$\mathring{e}_x = E(T_x)$	expérance de vie à l'âge x.
$L_{\underline{x}}$	nombre de survivants à l'âge x (en âge révolu).

Remarques :

1. ${}_tp_x = \dfrac{l_{x+t}}{l_x}$; $\quad p_x = \dfrac{l_{x+1}}{l_x}$; $\quad q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$

2. $\mathring{e}_x = \displaystyle\int_0^\infty {}_tp_x\,dt \simeq \frac{1}{l_x}\sum_{\alpha=0}^{\Omega-x-1} l_{x+\alpha} - \frac{1}{2}$

3. $$L_{\underline{x}} = \begin{cases} 0{,}85\,l_1 + 0{,}15\,l_0 & : x = 0 \\ \dfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1}) + \dfrac{1}{24}(d_{x+1} - d_{x-1}) & : x > 0 \end{cases}$$

* * *

3. — Tables de mortalité brutes 1968-1972.

a. *Collecte des données et calculs.*

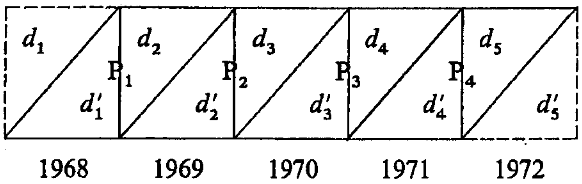
i — Années de référence.

Les décès de 1968, 1969, 1970, 1971, 1972 ont été repris de la statistique des décès par âge et par génération.

ii — Quotients de mortalité.

A. Les quotients de mortalité pour les âges supérieurs à un, ont été obtenus par application de la formule :

$$\frac{(d_2 + d_3 + d_4 + d_5) + (d_1' + d_2' + d_3' + d_4')}{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) + (d_1' + d_2' + d_3' + d_4')}$$



où :

— les P_i représentent les populations de l'âge considéré (en années révolues) à la fin de l'année.

— les d_i et les d_i' représentent respectivement les décès avant et après la date anniversaire de la naissance.

B. Le quotient de mortalité à l'âge zéro a été calculé à partir de la formule :

$$\frac{(d_2 + d_3 + d_4 + d_5) + (d_1' + d_2' + d_3' + d_4')}{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}$$

où les B_i représentent le nombre de naissances vivantes (âge exact zéro).

Le quotient de mortalité à l'âge un a été calculé par une formule analogue où les B_i représentent les survivants d'âge exact un.

*

b. *Résultats.*

On trouve dans les tableaux I, II, III, les tables de mortalité brutes pour la :

— population féminine : tableau I ;

— population masculine : tableau II ;

— population entière : tableau III.

Chaque tableau donne respectivement, en fonction de l'âge x, les quantités :

$$q_x,\ p_x,\ l_x,\ d_x,\ \mathring{e}_x,\ L_{\underline{x}}.$$

On notera que contrairement aux tables 1959-1963, les tables 1968-1972 ont été calculées en tenant compte des présentés sans vie.

A titre documentaire, on obtiendrait, en ne tenant pas compte des présentés sans vie, une probabilité de décès à l'âge zéro égale à :

0.012 058 pour la population féminine.
0.015 994 pour la population masculine.

Dans ce cas, l'espérance de vie s'élèverait alors à :

74.62 ans pour la population féminine.
68.34 pour la population masculine.
71.44 ans pour la population entière.

Tableau I. — Table de mortalité brute 1968-1972; Population féminine.

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
0	0.017632	0.982368	1000000	17632	74.21	985013	0
1	0.001324	0.998676	982368	1301	74.53	978424	1
2	0.000854	0.999146	981067	837	73.63	977224	2
3	0.000550	0.999450	980230	540	72.69	976472	3
4	0.000502	0.999498	979690	491	71.73	975870	4
5	0.000414	0.999586	979199	406	70.77	975333	5
6	0.000328	0.999672	978793	321	69.79	974868	6
7	0.000339	0.999661	978472	332	68.82	974453	7
8	0.000358	0.999642	978140	350	67.84	974062	8
9	0.000296	0.999704	977790	289	66.86	973695	9
10	0.000254	0.999746	977501	248	65.88	973353	10
11	0.000296	0.999704	977253	290	64.90	973017	11
12	0.000311	0.999689	976963	304	63.92	972668	12
13	0.000309	0.999691	976659	301	62.94	972297	13
14	0.000313	0.999687	976358	306	61.96	971896	14
15	0.000348	0.999652	976052	340	60.98	971438	15
16	0.000397	0.999603	975712	387	60.00	970867	16
17	0.000435	0.999565	975325	424	59.02	970150	17
18	0.000524	0.999476	974901	511	58.05	969312	18
19	0.000580	0.999420	974390	565	57.08	968342	19
20	0.000606	0.999394	973825	590	56.11	967291	20
21	0.000555	0.999445	973235	540	55.15	966259	21
22	0.000555	0.999445	972695	540	54.18	965239	22
23	0.000535	0.999465	972155	520	53.21	964288	23
24	0.000547	0.999453	971635	532	52.23	963375	24
25	0.000664	0.999336	971103	645	51.26	962460	25
26	0.000635	0.999365	970458	616	50.30	961499	26
27	0.000679	0.999321	969842	659	49.33	960486	27
28	0.000678	0.999322	969183	657	48.36	959517	28
29	0.000792	0.999208	968526	767	47.39	958512	29
30	0.000728	0.999272	967759	704	46.43	957444	30
31	0.000742	0.999258	967055	718	45.46	956389	31
32	0.000867	0.999133	966337	838	44.50	955274	32
33	0.000902	0.999098	965499	870	43.53	954103	33
34	0.000969	0.999031	964629	935	42.57	952883	34
35	0.000976	0.999024	963694	941	41.61	951596	35
36	0.001256	0.998744	962753	1209	40.65	950171	36
37	0.001131	0.998869	961544	1087	39.71	948628	37
38	0.001296	0.998704	960457	1245	38.75	947053	38
39	0.001676	0.998324	959212	1608	37.80	945245	39
40	0.001545	0.998455	957604	1479	36.86	943222	40
41	0.001742	0.998258	956125	1666	35.92	941090	41
42	0.002026	0.997974	954459	1934	34.98	938660	42
43	0.002237	0.997763	952525	2130	34.05	935962	43
44	0.002506	0.997494	950395	2382	33.13	933047	44
45	0.002619	0.997381	948013	2483	32.21	929781	45
46	0.002988	0.997012	945530	2825	31.29	926189	46
47	0.003240	0.996760	942705	3055	30.38	922251	47
48	0.003561	0.996439	939650	3346	29.48	917973	48
49	0.003940	0.996060	936304	3689	28.58	913299	49

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
50	0.004520	0.995480	932615	4215	27.69	908012	50
51	0.004609	0.995391	928400	4279	26.82	902085	51
52	0.005212	0.994788	924121	4817	25.94	895665	52
53	0.005275	0.994725	919304	4849	25.07	888814	53
54	0.006340	0.993660	914455	5798	24.20	881188	54
55	0.006610	0.993390	908657	6006	23.35	872691	55
56	0.006911	0.993089	902651	6238	22.51	863687	56
57	0.007866	0.992134	896413	7051	21.66	853981	57
58	0.008546	0.991454	889362	7601	20.83	843449	58
59	0.009367	0.990633	881761	8259	20.00	831887	59
60	0.010303	0.989697	873502	9000	19.19	819192	60
61	0.011222	0.988778	864502	9701	18.38	805558	61
62	0.012866	0.987134	854801	10998	17.58	790601	62
63	0.014198	0.985802	843803	11981	16.81	774200	63
64	0.015422	0.984578	831822	12828	16.04	756770	64
65	0.017591	0.982409	818994	14407	15.29	738138	65
66	0.019414	0.980586	804587	15620	14.55	717840	66
67	0.021688	0.978312	788967	17111	13.83	696371	67
68	0.024057	0.975943	771856	18569	13.12	673711	68
69	0.027013	0.972987	753287	20348	12.44	649528	69
70	0.030691	0.969309	732939	22495	11.77	623862	70
71	0.034202	0.965798	710444	24299	11.12	596864	71
72	0.038197	0.961803	686145	26208	10.50	568649	72
73	0.043068	0.956932	659937	28422	9.90	539278	73
74	0.047591	0.952409	631515	30055	9.32	508938	74
75	0.053373	0.946627	601460	32102	8.76	477550	75
76	0.058910	0.941090	569358	33540	8.23	445385	76
77	0.066766	0.933234	535818	35775	7.71	412514	77
78	0.073387	0.926613	500043	36696	7.23	379154	78
79	0.084355	0.915645	463347	39086	6.76	345156	79
80	0.091933	0.908067	424261	39004	6.33	310923	80
81	0.101445	0.898555	385257	39082	5.93	277515	81
82	0.101578	0.898422	346175	35164	5.54	246021	82
83	0.126979	0.873021	311011	39492	5.11	215061	83
84	0.136779	0.863221	271519	37138	4.78	184462	84
85	0.152317	0.847683	234381	35700	4.46	155932	85
86	0.165043	0.834957	198681	32791	4.17	129592	86
87	0.181567	0.818433	165890	30120	3.89	105927	87
88	0.191993	0.808007	135770	26067	3.64	85084	88
89	0.213728	0.786272	109703	23447	3.39	66853	89
90	0.228843	0.771157	86256	19739	3.18	51183	90
91	0.246331	0.753669	66517	16385	2.97	38419	91
92	0.264457	0.735543	50132	13258	2.78	28223	92
93	0.291445	0.708555	36874	10747	2.60	20144	93
94	0.285641	0.714359	26127	7463	2.46	14049	94
95	0.311861	0.688139	18664	5820	2.24	9667	95
96	0.342497	0.657503	12844	4399	2.03	6431	96
97	0.352998	0.647002	8445	2981	1.83	4143	97
98	0.359091	0.640909	5464	1962	1.55	2683	98
99	0.361386	0.638614	3502	1266	1.14		99

Tableau II. — Table de mortalité brute 1968-1972; Population masculine.

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
0	0.023911	0.976089	1000000	23911	67.79	979676	0
1	0.001592	0.998408	976089	1554	68.44	975312	1
2	0.000992	0.999008	974535	967	67.55	974018	2
3	0.000755	0.999245	973568	735	66.61	973188	3
4	0.000678	0.999322	972833	659	65.66	972497	4
5	0.000602	0.999398	972174	586	64.71	971876	5
6	0.000561	0.999439	971588	545	63.75	971311	6
7	0.000475	0.999525	971043	461	62.78	970807	7
8	0.000429	0.999571	970582	416	61.81	970372	8
9	0.000424	0.999576	970166	412	60.84	969960	9
10	0.000431	0.999569	969754	418	59.86	969544	10
11	0.000402	0.999598	969336	389	58.89	969141	11
12	0.000422	0.999578	968947	409	57.91	968746	12
13	0.000481	0.999519	968538	466	56.94	968310	13
14	0.000547	0.999453	968072	530	55.96	967815	14
15	0.000687	0.999313	967542	664	54.99	967225	15
16	0.000913	0.999087	966878	883	54.03	966456	16
17	0.001180	0.998820	965995	1140	53.08	965440	17
18	0.001286	0.998714	964855	1241	52.14	964250	18
19	0.001560	0.998440	963614	1503	51.21	962872	19
20	0.001528	0.998472	962111	1470	50.29	961375	20
21	0.001543	0.998457	960641	1482	49.36	959899	21
22	0.001509	0.998491	959159	1448	48.44	958426	22
23	0.001312	0.998688	957711	1256	47.51	957077	23
24	0.001370	0.998630	956455	1311	46.57	955795	24
25	0.001201	0.998799	955144	1147	45.64	954575	25
26	0.001465	0.998535	953997	1397	44.69	953305	26
27	0.001376	0.998624	952600	1311	43.76	951938	27
28	0.001298	0.998702	951289	1235	42.82	950673	28
29	0.001409	0.998591	950054	1338	41.87	949392	29
30	0.001486	0.998514	948716	1410	40.93	948012	30
31	0.001454	0.998546	947306	1378	39.99	946621	31
32	0.001587	0.998413	945928	1501	39.05	945181	32
33	0.001536	0.998464	944427	1450	38.11	943706	33
34	0.001703	0.998297	942977	1606	37.17	942182	34
35	0.001763	0.998237	941371	1660	36.23	940552	35
36	0.001982	0.998018	939711	1862	35.29	938793	36
37	0.002095	0.997905	937849	1965	34.36	936873	37
38	0.002171	0.997829	935884	2032	33.43	934883	38
39	0.002488	0.997512	933852	2323	32.50	932715	39
40	0.002820	0.997180	931529	2627	31.58	930234	40
41	0.002987	0.997013	928902	2775	30.67	927543	41
42	0.003569	0.996431	926127	3305	29.76	924499	42
43	0.003658	0.996342	922822	3376	28.87	921154	43
44	0.004112	0.995888	919446	3781	27.97	917597	44
45	0.004782	0.995218	915665	4379	27.08	913512	45
46	0.005098	0.994902	911286	4645	26.21	908997	46
47	0.005720	0.994280	906641	5186	25.34	904084	47
48	0.006110	0.993890	901455	5508	24.49	898742	48
49	0.006894	0.993106	895947	6177	23.63	892922	49
50	0.007900	0.992100	889770	7029	22.79	886336	50
51	0.009169	0.990831	882741	8094	21.97	878752	51
52	0.009629	0.990371	874647	8422	21.17	870489	52
53	0.010797	0.989203	866225	9352	20.37	861634	53
54	0.012209	0.987791	856873	10462	19.59	851733	54
55	0.013627	0.986373	846411	11534	18.82	840716	55
56	0.014608	0.985392	834877	12196	18.08	828853	56
57	0.016173	0.983827	822681	13305	17.34	816106	57

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
58	0.017376	0.982624	809376	14064	16.61	802464	58
59	0.020345	0.979655	795312	16180	15.90	787354	59
60	0.022108	0.977892	779132	17226	15.22	770623	60
61	0.024504	0.975496	761906	18669	14.55	752706	61
62	0.027525	0.972475	743237	20458	13.91	733149	62
63	0.030501	0.969499	722779	22045	13.28	711857	63
64	0.032653	0.967347	700734	22881	12.69	689394	64
65	0.036094	0.963906	677853	24467	12.10	665769	65
66	0.040508	0.959492	653386	26467	11.53	640240	66
67	0.042359	0.957641	626919	26556	11.00	613722	67
68	0.047313	0.952687	600363	28405	10.46	586277	68
69	0.051319	0.948681	571958	29352	9.96	557365	69
70	0.056016	0.943984	542606	30395	9.47	527467	70
71	0.060058	0.939942	512211	30762	9.00	496879	71
72	0.065576	0.934424	481449	31572	8.54	465682	72
73	0.069375	0.930625	449877	31210	8.11	434276	73
74	0.075600	0.924400	418667	31651	7.68	402860	74
75	0.081771	0.918229	387016	31647	7.26	371179	75
76	0.088174	0.911826	355369	31334	6.87	339663	76
77	0.094759	0.905241	324035	30705	6.48	308632	77
78	0.102717	0.897283	293330	30130	6.11	278221	78
79	0.112678	0.887322	263200	29657	5.75	248300	79
80	0.121685	0.878315	233543	28419	5.41	219196	80
81	0.128535	0.871465	205124	26365	5.10	191804	81
82	0.140535	0.859465	178759	25122	4.77	166081	82
83	0.153413	0.846587	153637	23570	4.47	141701	83
84	0.165254	0.834746	130067	21494	4.19	119155	84
85	0.180748	0.819252	108573	19625	3.92	98582	85
86	0.193343	0.806657	88948	17197	3.68	80149	86
87	0.206489	0.793511	71751	14816	3.44	64161	87
88	0.225193	0.774807	56935	12821	3.21	50365	88
89	0.249347	0.750653	44114	11000	2.99	38450	89
90	0.268623	0.731377	33114	8895	2.82	28489	90
91	0.278291	0.721709	24219	6740	2.67	20695	91
92	0.297470	0.702530	17479	5199	2.51	14758	92
93	0.312150	0.687850	12280	3834	2.36	10269	93
94	0.349831	0.650169	8446	2954	2.20	6888	94
95	0.341749	0.658251	5492	1877	2.12	4487	95
96	0.375566	0.624434	3615	1358	1.96	2892	96
97	0.362637	0.637363	2257	818	1.84	1811	97
98	0.320285	0.679715	1439	461	1.61	1189	98
99	0.370752	0.629248	978	363	1.13		99

Tableau III. — Table de mortalité brute 1968-1972; Population entière.

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
0	0.020861	0.979139	1000000	20861	70.95	982268	0
1	0.001461	0.998539	979139	1431	71.45	978424	1
2	0.000924	0.999076	977708	903	70.55	977224	2
3	0.000655	0.999345	976805	640	69.62	976472	3
4	0.000592	0.999408	976165	578	68.66	975870	4
5	0.000510	0.999490	975587	497	67.70	975333	5
6	0.000447	0.999553	975090	436	66.74	974868	6
7	0.000408	0.999592	974654	398	65.77	974453	7
8	0.000394	0.999606	974256	384	64.79	974062	8
9	0.000361	0.999639	973872	351	63.82	973695	9
10	0.000344	0.999656	973521	335	62.84	973353	10
11	0.000350	0.999650	973186	341	61.86	973017	11
12	0.000368	0.999632	972845	358	60.88	972668	12
13	0.000397	0.999603	972487	386	59.91	972297	13
14	0.000432	0.999568	972101	420	58.93	971896	14
15	0.000520	0.999480	971681	505	57.96	971438	15
16	0.000660	0.999340	971176	641	56.99	970867	16
17	0.000815	0.999185	970535	791	56.02	970150	17
18	0.000913	0.999087	969744	885	55.07	969312	18
19	0.001080	0.998920	968859	1047	54.12	968342	19
20	0.001075	0.998925	967812	1040	53.18	967291	20
21	0.001059	0.998941	966772	1024	52.23	966259	21
22	0.001043	0.998957	965748	1007	51.29	965239	22
23	0.000932	0.999068	964741	899	50.34	964288	23
24	0.000968	0.999032	963842	933	49.39	963375	24
25	0.000939	0.999061	962909	904	48.43	962460	25
26	0.001059	0.998941	962005	1019	47.48	961499	26
27	0.001035	0.998965	960986	995	46.53	960486	27
28	0.000994	0.999006	959991	954	45.58	959517	28
29	0.001105	0.998895	959037	1060	44.62	958512	29
30	0.001112	0.998888	957977	1065	43.67	957444	30
31	0.001102	0.998898	956912	1055	42.72	956389	31
32	0.001230	0.998770	955857	1175	41.77	955274	32
33	0.001222	0.998778	954682	1167	40.82	954103	33
34	0.001339	0.998661	953515	1277	39.87	952883	34
35	0.001372	0.998628	952238	1306	38.92	951596	35
36	0.001621	0.998379	950932	1542	37.97	950171	36
37	0.001615	0.998385	949390	1533	37.03	948628	37
38	0.001735	0.998265	947857	1644	36.09	947053	38
39	0.002083	0.997917	946213	1971	35.15	945245	39
40	0.002183	0.997817	944242	2062	34.23	943222	40
41	0.002365	0.997635	942180	2228	33.30	941090	41
42	0.002797	0.997203	939952	2629	32.38	938660	42
43	0.002945	0.997055	937323	2760	31.47	935962	43
44	0.003305	0.996695	934563	3089	30.56	933047	44
45	0.003694	0.996306	931474	3441	29.66	929781	45
46	0.004036	0.995964	928033	3745	28.77	926189	46
47	0.004469	0.995531	924288	4131	27.88	922251	47
48	0.004821	0.995179	920157	4436	27.00	917973	48
49	0.005399	0.994601	915721	4944	26.13	913299	49
50	0.006186	0.993814	910777	5634	25.27	908012	50
51	0.006848	0.993152	905143	6199	24.42	902085	51
52	0.007381	0.992619	898944	6635	23.59	895665	52
53	0.007976	0.992024	892309	7117	22.76	888814	53
54	0.009205	0.990795	885192	8148	21.94	881188	54
55	0.010029	0.989971	877044	8796	21.14	872691	55
56	0.010640	0.989360	868248	9238	20.35	863687	56
57	0.011869	0.988131	859010	10196	19.56	853981	57

x	q_x	p_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	x
58	0.012842	0.987158	848814	10900	18.79	843449	58
59	0.014608	0.985392	837914	12240	18.03	831887	59
60	0.015897	0.984103	825674	13126	17.29	819192	60
61	0.017472	0.982528	812548	14197	16.56	805558	61
62	0.019708	0.980292	798351	15734	15.85	790601	62
63	0.021739	0.978261	782617	17013	15.15	774200	63
64	0.023343	0.976657	765604	17872	14.48	756770	64
65	0.026019	0.973981	747732	19455	13.81	738138	65
66	0.028939	0.971061	728277	21075	13.17	717840	66
67	0.030915	0.969085	707202	21864	12.55	696371	67
68	0.034295	0.965705	685338	23503	11.93	673711	68
69	0.037562	0.962438	661835	24860	11.34	649528	69
70	0.041522	0.958478	636975	26449	10.76	623862	70
71	0.045088	0.954912	610526	27527	10.20	596864	71
72	0.049556	0.950444	582999	28891	9.66	568649	72
73	0.053823	0.946177	554108	29824	9.14	539278	73
74	0.058866	0.941134	524284	30862	8.63	508938	74
75	0.064598	0.935402	493422	31874	8.14	477550	75
76	0.070287	0.929713	461548	32441	7.67	445385	76
77	0.077535	0.922465	429107	33271	7.21	412514	77
78	0.084538	0.915462	395836	33463	6.77	379154	78
79	0.095106	0.904894	362373	34464	6.35	345156	79
80	0.103184	0.896816	327909	33835	5.97	310923	80
81	0.111628	0.888372	294074	32827	5.60	277515	81
82	0.116173	0.883827	261247	30350	5.24	246021	82
83	0.136814	0.863186	230897	31590	4.86	215061	83
84	0.147324	0.852676	199307	29362	4.55	184462	84
85	0.162740	0.837260	169945	27657	4.25	155932	85
86	0.175353	0.824647	142288	24951	3.98	129592	86
87	0.190522	0.809478	117337	22355	3.73	105927	87
88	0.203812	0.796188	94982	19359	3.48	85084	88
89	0.226246	0.773754	75623	17109	3.25	66853	89
90	0.242442	0.757558	58514	14186	3.05	51183	90
91	0.256972	0.743028	44328	11391	2.87	38419	91
92	0.275389	0.724611	32937	9071	2.69	28223	92
93	0.298110	0.701890	23866	7114	2.52	20144	93
94	0.305791	0.694209	16752	5123	2.38	14049	94
95	0.320704	0.679296	11629	3729	2.21	9667	95
96	0.351598	0.648402	7900	2778	2.01	6431	96
97	0.355944	0.644056	5122	1823	1.83	4143	97
98	0.347503	0.652497	3299	1146	1.57	2683	98
99	0.367336	0.632664	2153	791	1.13		99

4. — Evolution de la mortalité entre 1959 et 1972.

a. *Evolution de la probabilité de décès à l'âge x.*

Le tableau IV donne respectivement pour la population féminine et masculine, les chiffres caractérisant l'évolution de la probabilité de décès pour la période 1959-1972.

A titre documentaire, on obtiendrait la première ligne suivante, en ne tenant pas compte des présentés sans vie :

0 0.012 058 0.018 660 −0.006 602 ;
0.015 994 0.024 140 −0.008 146 . 0

Cette évolution est illustrée par une série de vingt-trois graphiques. Chaque graphique comporte deux courbes :

— celle en trait plein correspond à la période 1959-1963 ;

— celle en trait pointillé correspond à la période 1968-1972.

Les zones d'âge balayées par ces graphiques sont les suivantes :

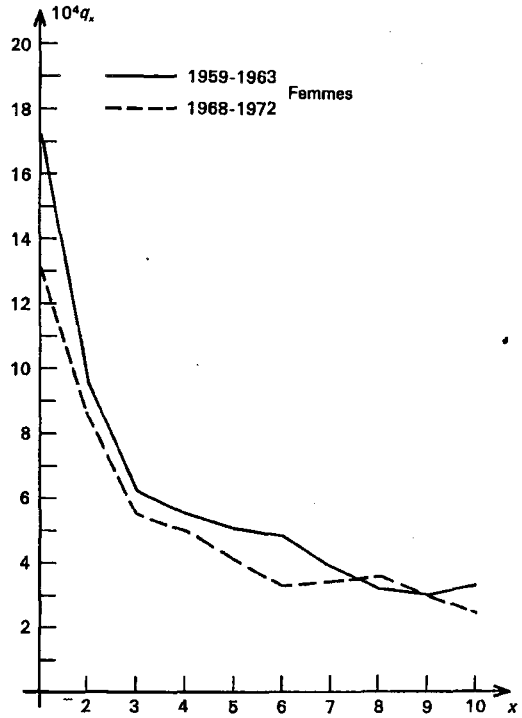
$1 \leqslant x \leqslant 10$: graphiques 1, 8 et 15
$10 \leqslant x \leqslant 30$: graphiques 2, 9 et 16
$30 \leqslant x \leqslant 45$: graphiques 3, 10 et 17
$45 \leqslant x \leqslant 60$: graphiques 4, 11 et 18
$60 \leqslant x \leqslant 75$: graphiques 5, 12 et 19
$75 \leqslant x \leqslant 85$: graphiques 6, 13 et 20
$85 \leqslant x \leqslant 99$: graphiques 7, 14 et 21
$0 \leqslant x \leqslant 99$: graphiques 22 et 23.

Tableau IV. — Évolution de la probabilité de décès à l'âge *x*.

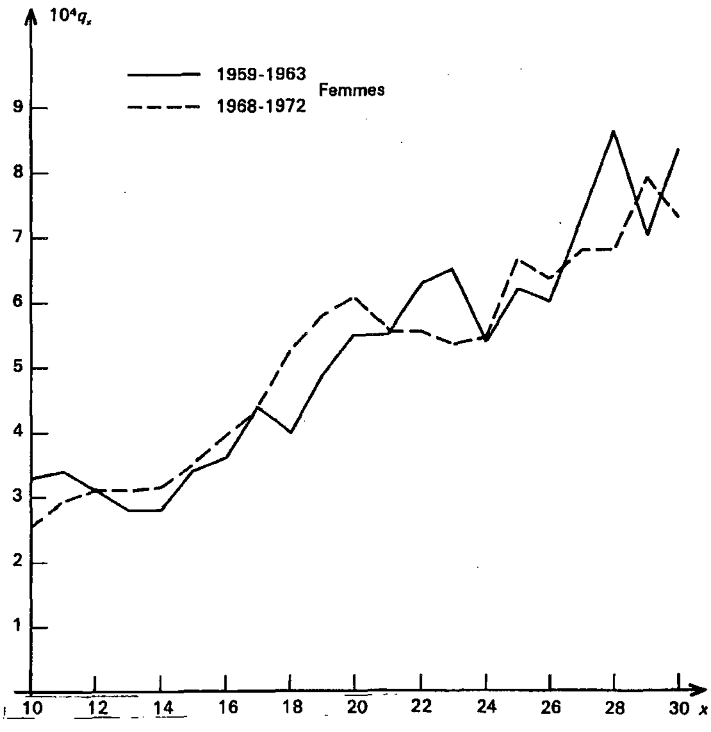
x	Femmes			Hommes			x
	q_x 1968-1972	q_x 1959-1963	Variation	q_x 1968-1972	q_x 1959-1963	Variation	
0	0.017632	0.024970	−0.007338	0.023911	0.032430	−0.008519	0
1	0.001324	0.001720	−0.000396	0.001592	0.001860	−0.000268	1
2	0.000854	0.000960	−0.000106	0.000992	0.001120	−0.000128	2
3	0.000550	0.000620	−0.000070	0.000755	0.000860	−0.000105	3
4	0.000502	0.000550	−0.000048	0.000678	0.000760	−0.000082	4
5	0.000414	0.000510	−0.000096	0.000602	0.000630	−0.000028	5
6	0.000328	0.000490	−0.000162	0.000561	0.000640	−0.000079	6
7	0.000339	0.000390	−0.000051	0.000475	0.000550	−0.000075	7
8	0.000358	0.000320	0.000038	0.000429	0.000500	−0.000071	8
9	0.000296	0.000300	−0.000004	0.000424	0.000410	0.000014	9
10	0.000254	0.000330	−0.000076	0.000431	0.000520	−0.000089	10
11	0.000296	0.000340	−0.000044	0.000402	0.000410	−0.000008	11
12	0.000311	0.000310	0.000001	0.000422	0.000430	−0.000008	12
13	0.000309	0.000280	0.000029	0.000481	0.000450	0.000031	13
14	0.000313	0.000280	0.000033	0.000547	0.000580	−0.000033	14
15	0.000348	0.000340	0.000008	0.000687	0.000690	−0.000003	15
16	0.000397	0.000360	0.000037	0.000913	0.000810	0.000103	16
17	0.000435	0.000440	−0.000005	0.001180	0.000980	0.000200	17
18	0.000524	0.000400	0.000124	0.001286	0.001120	0.000166	18
19	0.000580	0.000490	0.000090	0.001560	0.001210	0.000350	19
20	0.000606	0.000550	0.000056	0.001528	0.001400	0.000128	20
21	0.000555	0.000550	0.000005	0.001543	0.001670	−0.000127	21
22	0.000555	0.000630	−0.000075	0.001509	0.001690	−0.000181	22
23	0.000535	0.000650	−0.000115	0.001312	0.001570	−0.000258	23
24	0.000547	0.000540	0.000007	0.001370	0.001460	−0.000090	24
25	0.000664	0.000620	0.000044	0.001201	0.001430	−0.000229	25
26	0.000635	0.000600	0.000035	0.001465	0.001350	0.000115	26
27	0.000679	0.000730	−0.000051	0.001376	0.001460	−0.000084	27
28	0.000678	0.000860	−0.000182	0.001298	0.001400	−0.000102	28
29	0.000792	0.000700	0.000092	0.001409	0.001540	−0.000131	29
30	0.000728	0.000830	−0.000102	0.001486	0.001610	−0.000124	30
31	0.000742	0.000780	−0.000038	0.001454	0.001720	−0.000266	31
32	0.000867	0.000940	−0.000073	0.001587	0.001570	0.000017	32
33	0.000902	0.001070	−0.000168	0.001536	0.001720	−0.000184	33
34	0.000969	0.001190	−0.000221	0.001703	0.001930	−0.000227	34
35	0.000976	0.001220	−0.000244	0.001763	0.001840	−0.000077	35
36	0.001256	0.001360	−0.000104	0.001982	0.002110	−0.000128	36
37	0.001131	0.001420	−0.000289	0.002095	0.002150	−0.000055	37
38	0.001296	0.001570	−0.000274	0.002171	0.002460	−0.000289	38
39	0.001676	0.001600	0.000076	0.002488	0.002780	−0.000292	39
40	0.001545	0.001840	−0.000295	0.002820	0.002850	−0.000030	40
41	0.001742	0.002000	−0.000258	0.002987	0.003010	−0.000023	41
42	0.002026	0.002060	−0.000034	0.003569	0.003710	−0.000141	42

x	Femmes			Hommes			x
	q_x 1968-1972	q_x 1959-1963	Variation	q_x 1968-1972	q_x 1959-1963	Variation	
43	0.002237	0.002270	−0.000033	0.003658	0.003890	−0.000232	43
44	0.002506	0.002470	0.000036	0.004112	0.004330	−0.000218	44
45	0.002619	0.002810	−0.000191	0.004782	0.004910	−0.000128	45
46	0.002988	0.003150	−0.000162	0.005098	0.005180	−0.000082	46
47	0.003240	0.003430	−0.000190	0.005720	0.005920	−0.000200	47
48	0.003561	0.003740	−0.000179	0.006110	0.006680	−0.000570	48
49	0.003940	0.003900	0.000040	0.006894	0.007280	−0.000386	49
50	0.004520	0.004210	0.000310	0.007900	0.008180	−0.000280	50
51	0.004609	0.004780	−0.000171	0.009169	0.009260	−0.000091	51
52	0.005212	0.005010	0.000202	0.009629	0.010300	−0.000671	52
53	0.005275	0.005530	−0.000255	0.010797	0.011480	−0.000683	53
54	0.006340	0.006120	0.000220	0.012209	0.012930	−0.000721	54
55	0.006610	0.006680	−0.000070	0.013627	0.013740	−0.000113	55
56	0.006911	0.007380	−0.000469	0.014608	0.015760	−0.001152	56
57	0.007866	0.008140	−0.000274	0.016173	0.017610	−0.001437	57
58	0.008546	0.008870	−0.000324	0.017376	0.019270	−0.001894	58
59	0.009367	0.009890	−0.000523	0.020345	0.020790	−0.000445	59
60	0.010303	0.011010	−0.000707	0.022108	0.023040	−0.000932	60
61	0.011222	0.012080	−0.000858	0.024504	0.024650	−0.000146	61
62	0.012866	0.013680	−0.000814	0.027525	0.027460	0.000065	62
63	0.014198	0.015020	−0.000822	0.030501	0.029860	0.000641	63
64	0.015422	0.016980	−0.001558	0.032653	0.032140	0.000513	64
65	0.017591	0.018590	−0.000999	0.036094	0.034740	0.001354	65
66	0.019414	0.020650	−0.001236	0.040508	0.037090	0.003418	66
67	0.021688	0.022770	−0.001082	0.042359	0.040500	0.001859	67
68	0.024057	0.026010	−0.001953	0.047313	0.042790	0.004523	68
69	0.027013	0.029110	−0.002097	0.051319	0.046750	0.004569	69
70	0.030691	0.031530	−0.000839	0.056016	0.051200	0.004816	70
71	0.034202	0.036840	−0.002638	0.060058	0.054100	0.005958	71
72	0.038197	0.041010	−0.002813	0.065576	0.058640	0.006936	72
73	0.043068	0.046120	−0.003052	0.069375	0.063010	0.006365	73
74	0.047591	0.050530	−0.002939	0.075600	0.069730	0.005870	74
75	0.053373	0.057070	−0.003697	0.081771	0.077350	0.004421	75
76	0.058910	0.064130	−0.005220	0.088174	0.085990	0.002184	76
77	0.066766	0.072520	−0.005754	0.094759	0.093550	0.001209	77
78	0.073387	0.080150	−0.006763	0.102717	0.099480	0.003237	78
78	0.084355	0.088570	−0.004215	0.112678	0.110180	0.002498	79
80	0.091933	0.098320	−0.006387	0.121685	0.118280	0.003405	80
81	0.101445	0.107080	−0.005635	0.128535	0.130020	−0.001485	81
82	0.101578	0.116900	−0.015322	0.140535	0.145280	−0.004745	82
83	0.126979	0.130400	−0.003421	0.153413	0.159220	−0.005807	83
84	0.136779	0.145180	−0.008401	0.165254	0.174900	−0.009646	84
85	0.152317	0.159230	−0.006913	0.180748	0.190220	−0.009472	85
86	0.165043	0.173150	−0.008107	0.193343	0.201460	−0.008117	86
87	0.181567	0.193330	−0.011763	0.206489	0.225140	−0.018651	87
88	0.191993	0.202970	−0.010977	0.225193	0.232660	−0.007467	88
89	0.213728	0.218500	−0.004772	0.249347	0.259840	−0.010493	89
90	0.228843	0.238270	−0.009427	0.268623	0.273990	−0.005367	90
91	0.246331	0.257630	−0.011299	0.278291	0.294600	−0.016309	91
92	0.264457	0.274710	−0.010253	0.297470	0.311690	−0.014220	92
93	0.291445	0.288820	0.002625	0.312150	0.326550	−0.014400	93
94	0.285641	0.310120	−0.024479	0.349831	0.357510	−0.007679	94
95	0.311861	0.314660	−0.002799	0.341749	0.390280	−0.048531	95
96	0.342497	0.315930	0.026567	0.375566	0.391410	−0.015844	96
97	0.352998	0.370000	−0.017002	0.362637	0.410360	−0.047723	97
98	0.359091	0.377400	−0.018309	0.320285	0.359480	−0.039195	98
99	0.361386	0.344830	0.016556	0.370752	0.413460	−0.042708	99

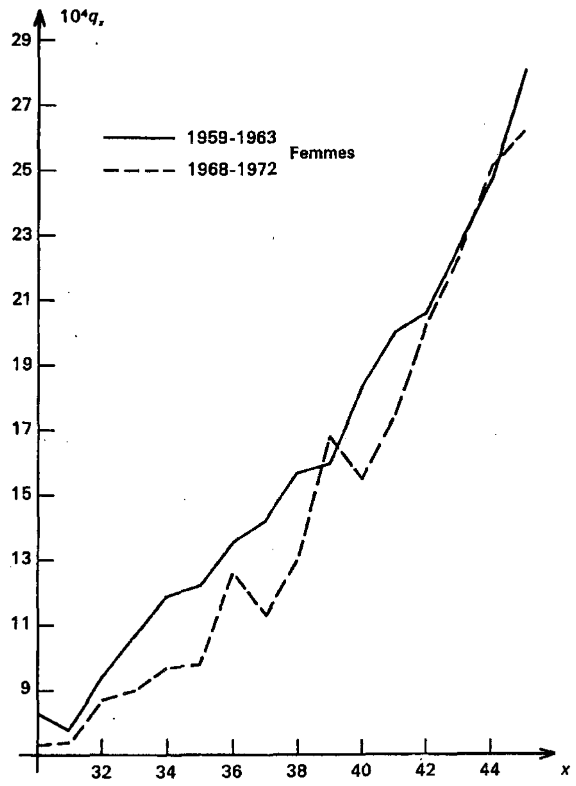
GRAPHIQUE 1.



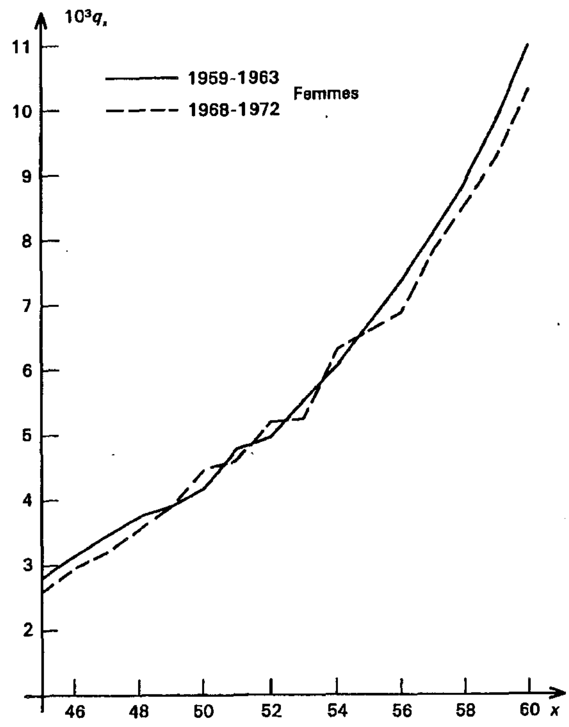
GRAPHIQUE 2.



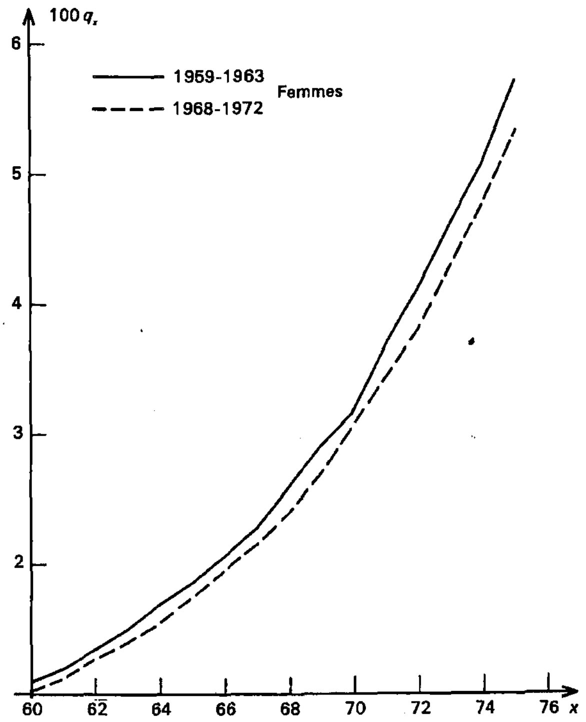
GRAPHIQUE 3.



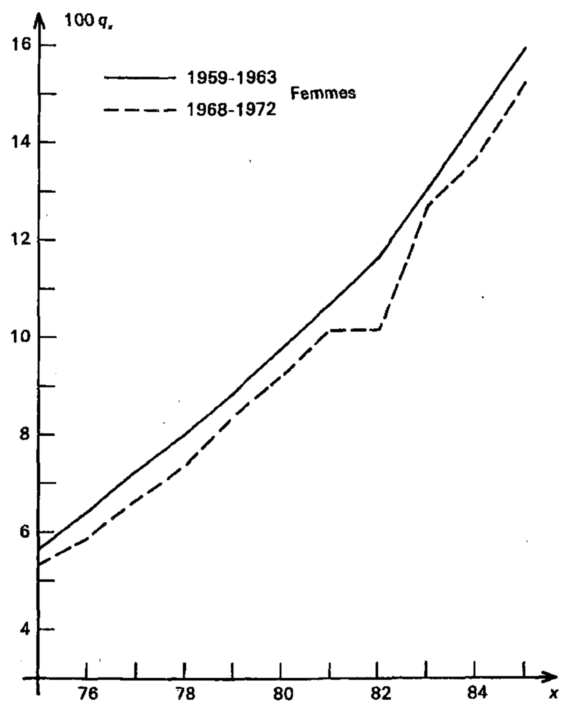
GRAPHIQUE 4.



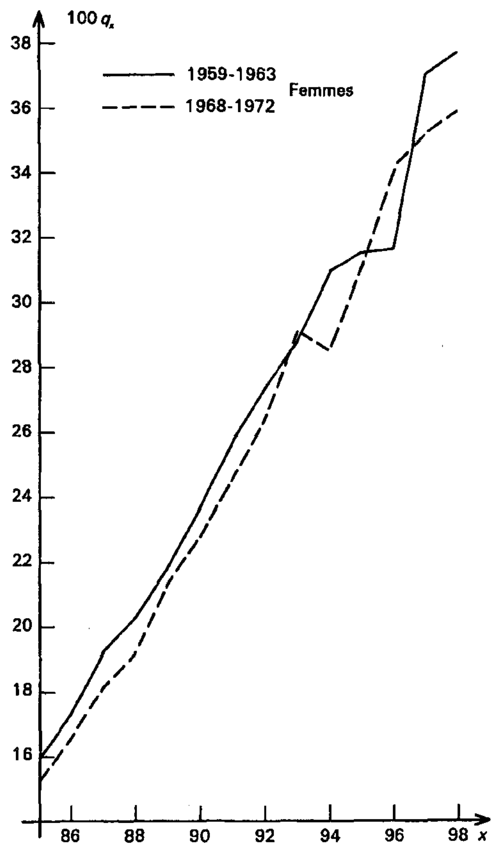
GRAPHIQUE 5.



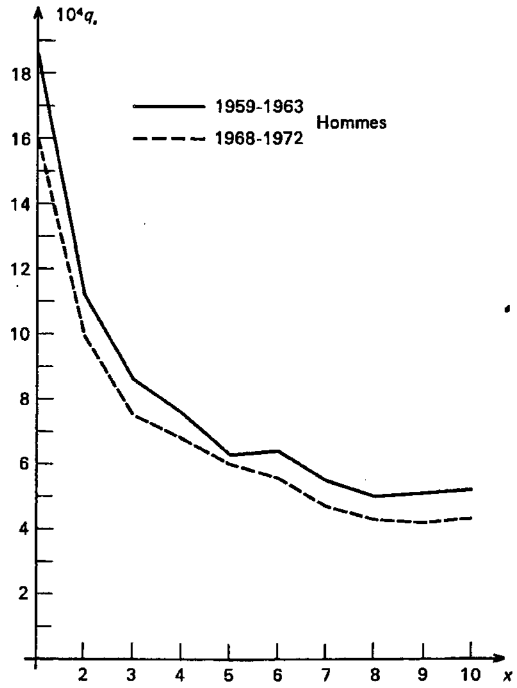
GRAPHIQUE 6.



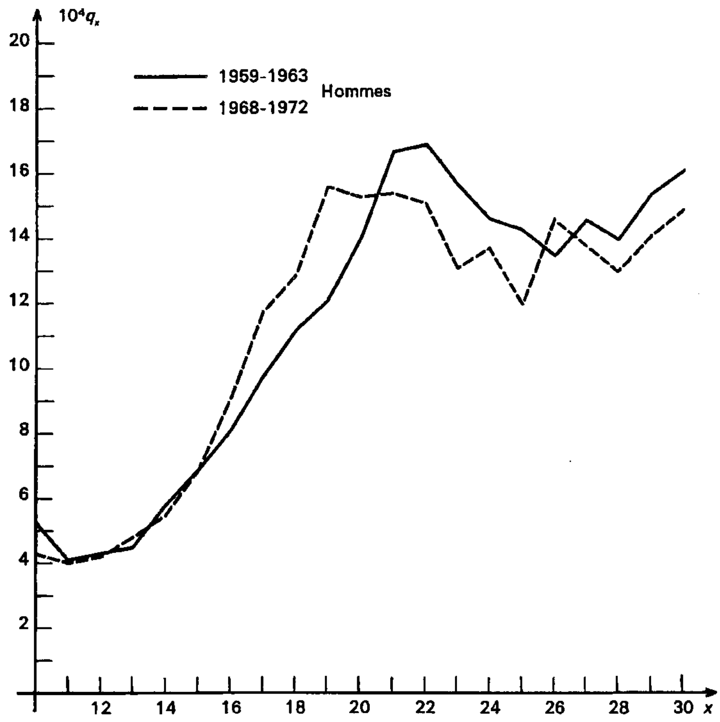
GRAPHIQUE 7.



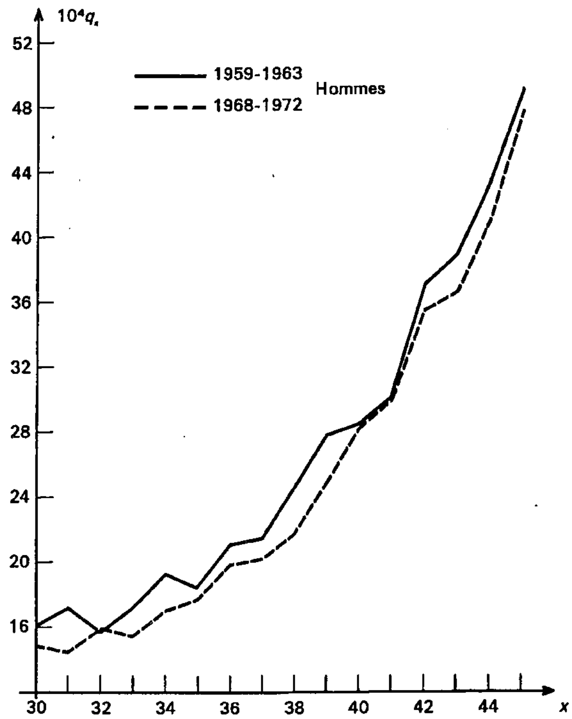
GRAPHIQUE 8.



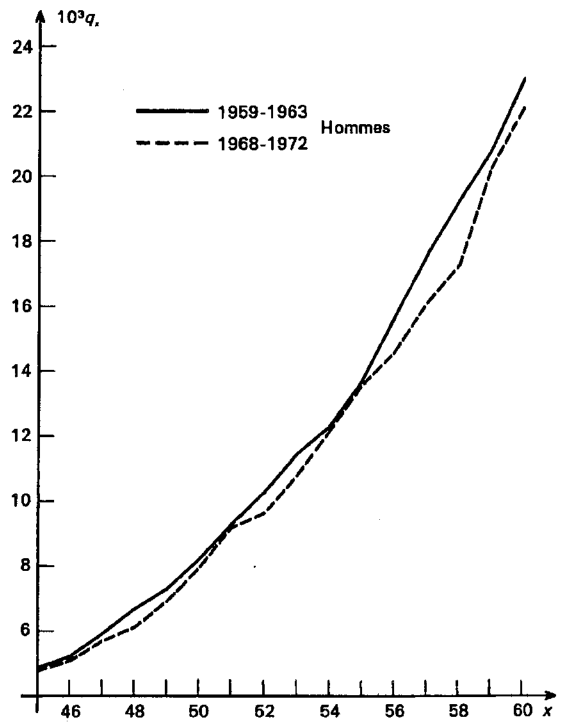
GRAPHIQUE 9.



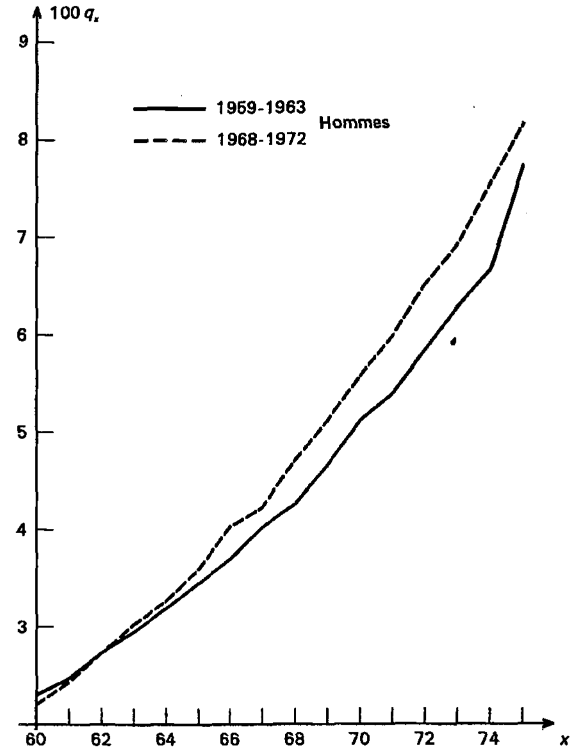
GRAPHIQUE 10.



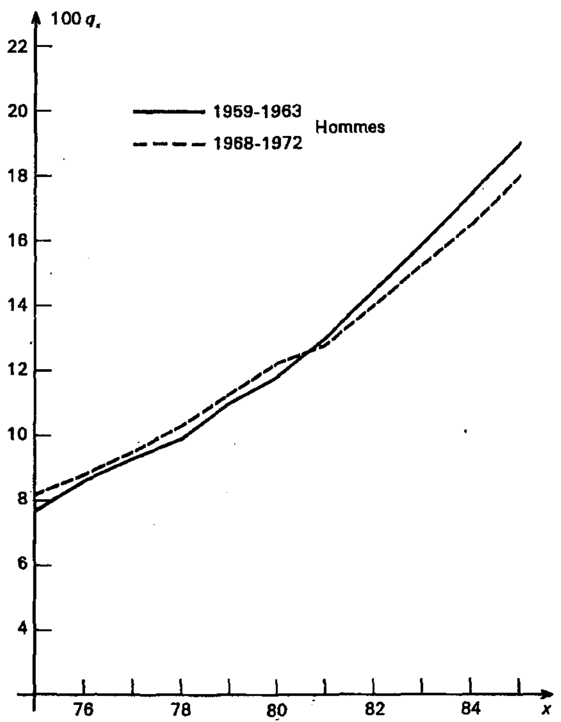
GRAPHIQUE 11.



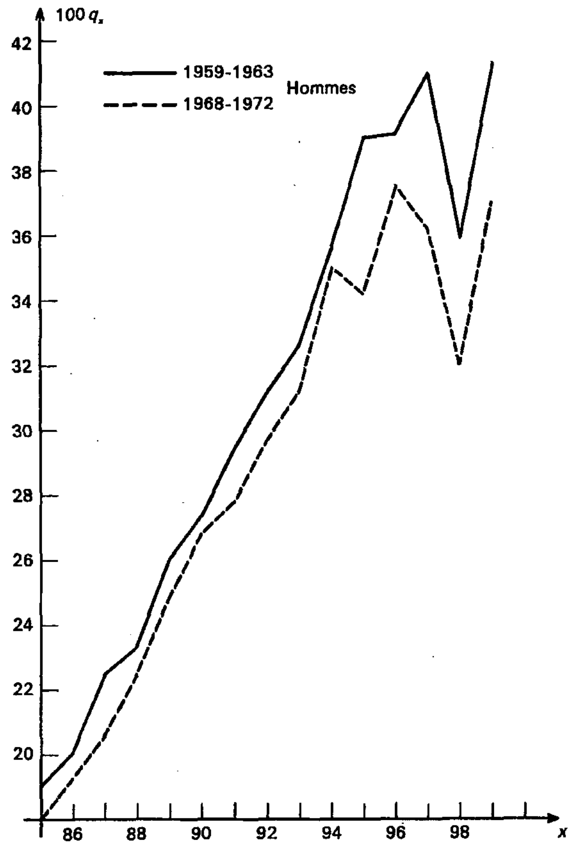
GRAPHIQUE 12.



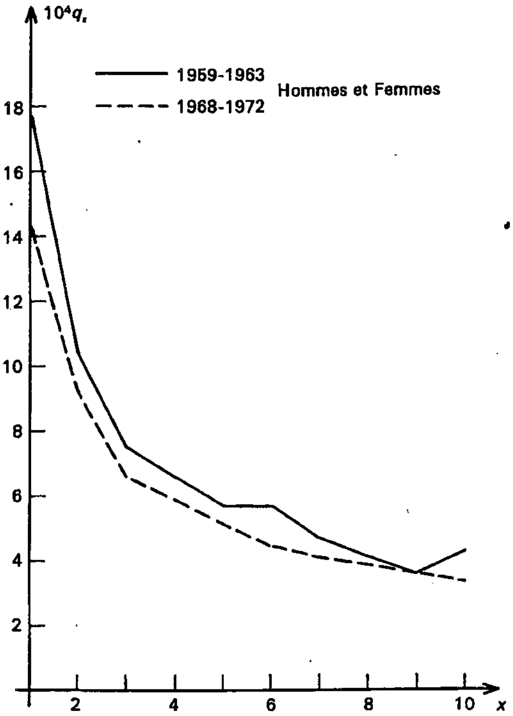
GRAPHIQUE 13.



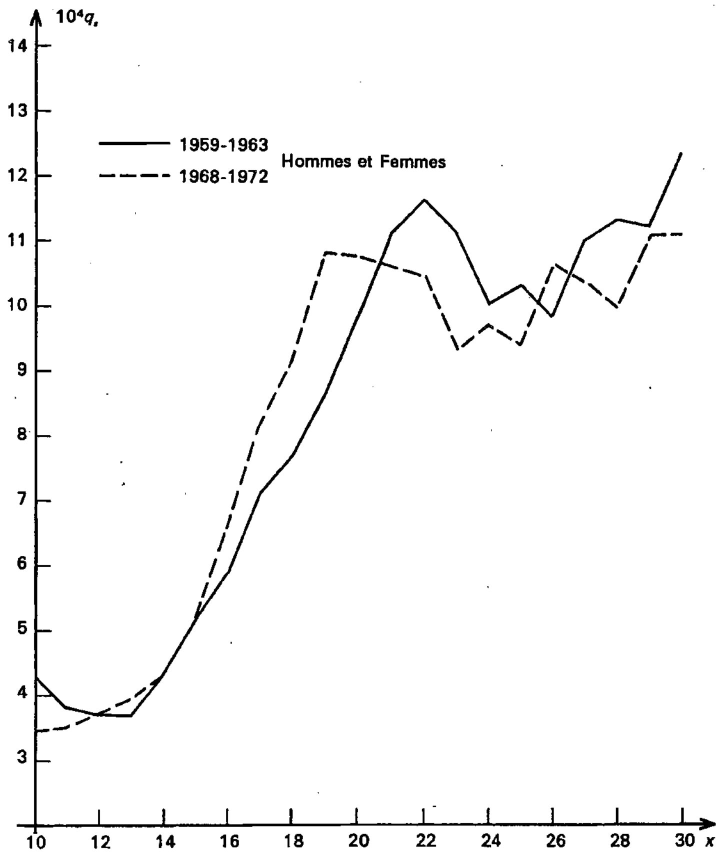
GRAPHIQUE 14.



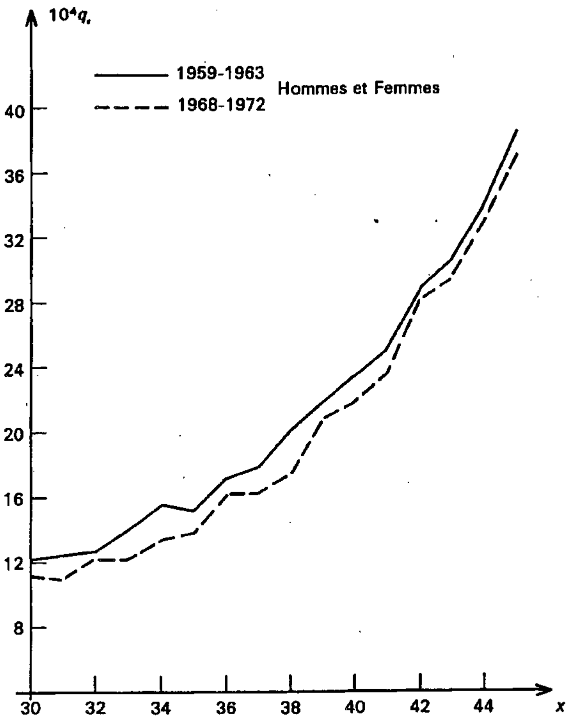
GRAPHIQUE 15.



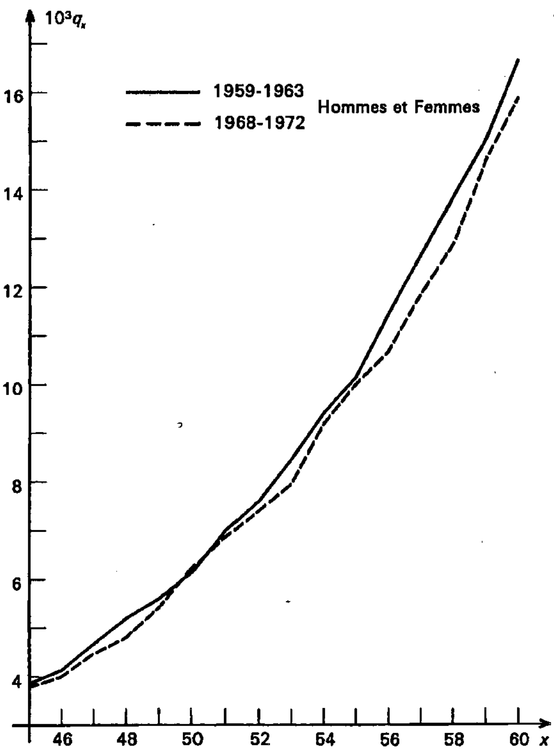
GRAPHIQUE 16.



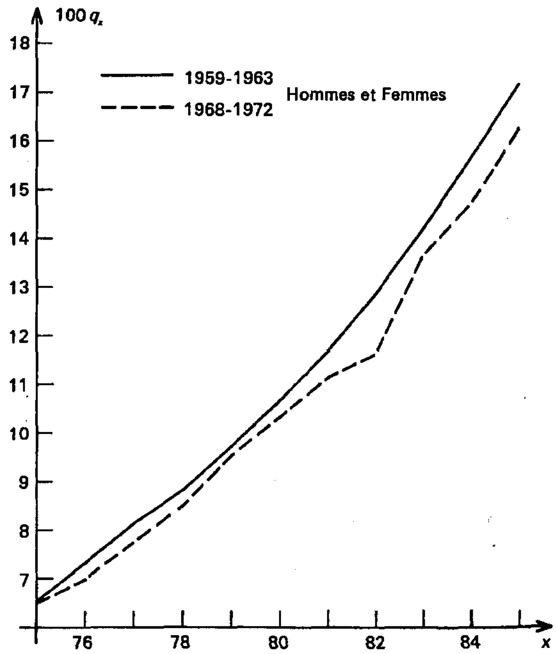
GRAPHIQUE 17.



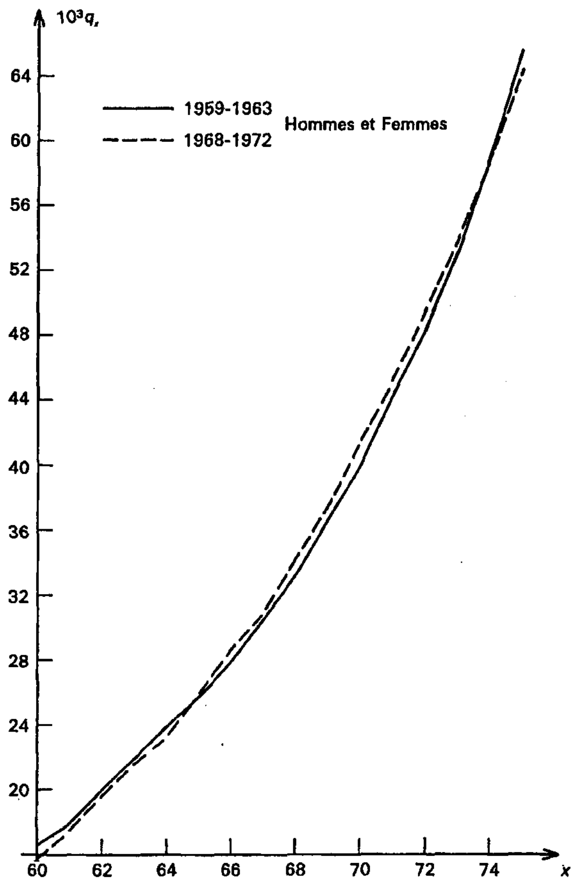
GRAPHIQUE 18.



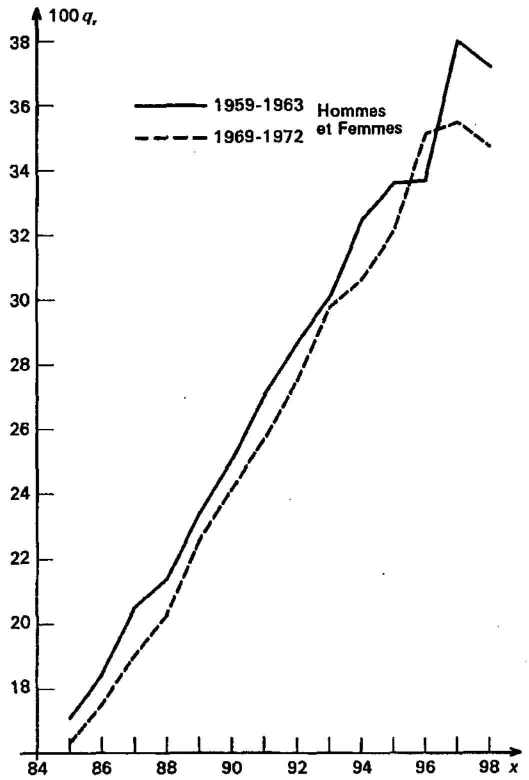
GRAPHIQUE 20.



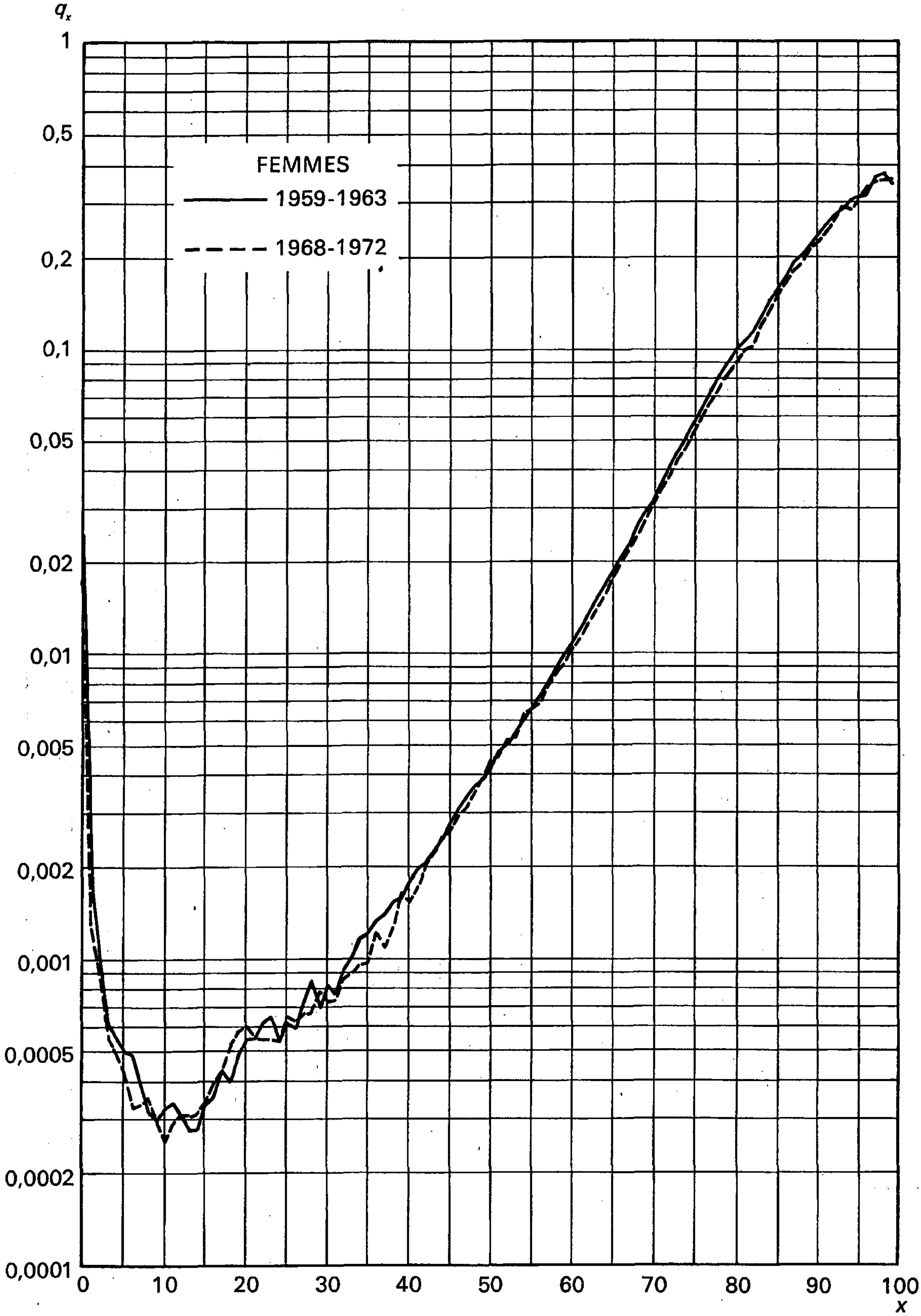
GRAPHIQUE 19.



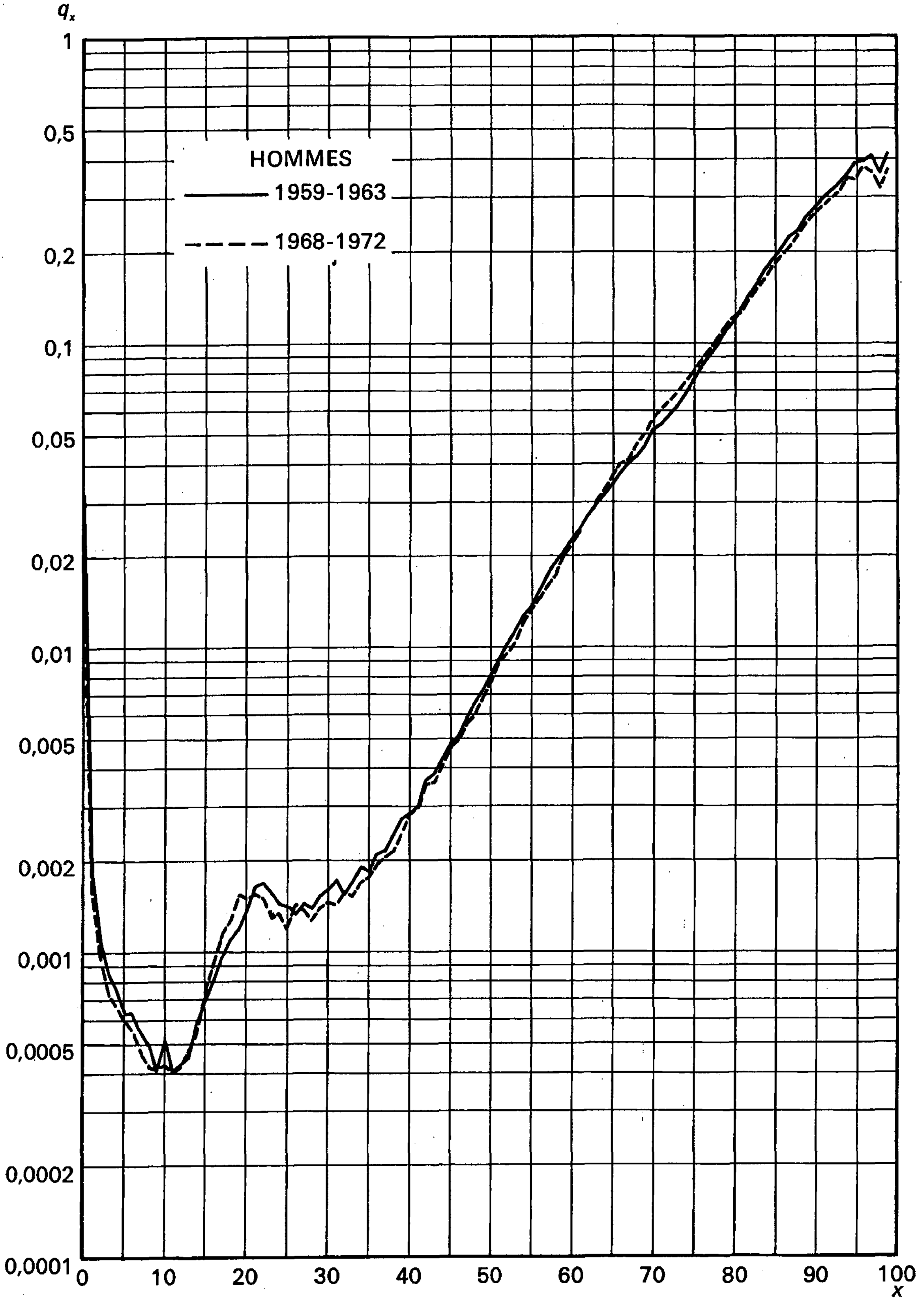
GRAPHIQUE 21.



GRAPHIQUE 22.



GRAPHIQUE 23.



La consultation du tableau IV et des graphiques 1 à 23 amène aux constatations suivantes :

A. Globalement, la probabilité de décès a diminué sur la période 1959-1972. Cette diminution est cependant de faible amplitude : on observe un phénomène de tassement de la mortalité en Belgique.

B. Localement et pour le sexe masculin seulement, on observe le phénomène inverse : la probabilité de décès a en effet augmenté pour la population masculine dans les intervalles :

$$15 \leqslant x \leqslant 20$$
$$62 \leqslant x \leqslant 80.$$

C. A la naissance, la probabilité de décès sur une année a fortement diminué pour les deux sexes :

i — pour le sexe féminin, elle est passée de 0.024 970 à 0.017 632 ; on enregistre donc une diminution de 29.4 %.

ii — pour le sexe masculin, elle est passée de 0.032 430 à 0.023 911 ; on enregistre donc une diminution de 26.2 %.

Cette diminution toute remarquable qu'elle soit, ne doit pas éclipser le fait qu'en Belgique, les taux de mortalité infantile restent élevés, par rapport à ceux constatés dans les pays nordiques voisins.

A titre d'illustration, on trouve ci-dessous les probabilités de décès à la naissance pour quelques pays voisins de la Belgique. (Ces chiffres proviennent de l'Annuaire Démographique de l'O.N.U. - 1972.)

Pays	q_0 Population féminine	q_0 Population masculine	q_0 Population entière
Suède (1971)	0.0099	0.0131	0.0115
Pays-Bas (1971)	0.0101	0.0138	0.0120
Norvège (1970)	0.0104	0.0151	0.0128
Belgique (1970)	0.0176	0.0239	0.0209

Le tableau V donne les quantités :

$$\frac{q_x \text{ (Hommes 1968-1972)}}{q_x \text{ (Femmes 1968-1972)}} \quad \frac{q_x \text{ (Hommes 1959-1963)}}{q_x \text{ (Femmes 1959-1963)}},$$

pour $0 \leqslant x \leqslant 99$.

La consultation de ce tableau amène à la conclusion que la surmortalité masculine s'est encore localement aggravée, et notamment dans les intervalles 30-40 et 60-80.

b. *Evolution de l'espérance de vie à l'âge x.*

Le tableau VI donne, exprimées en années, et pour les populations féminine et masculine :

— l'espérance de vie à l'âge x calculée sur la période 1959-1963.
— l'espérance de vie à l'âge x calculée sur la période 1968-1972.
— la variation observée.

La consultation de ce tableau amène aux conclusions suivantes :

A. Pour la population féminine :

— l'espérance de vie à la naissance a augmenté de 1.17 année ou de 14 mois.
— aux âges différents de zéro et plus petits que 65 ans, le gain d'espérance de vie est de l'ordre de la demi-année.

Globalement, on enregistre un progrès à tout âge. Ce progrès n'est cependant pas très important.

B. Pour la population masculine :

— l'espérance de vie à la naissance a augmenté de 0.63 année ou de 7 mois et demi.
— pour les âges différents de zéro, le gain d'espérance de vie est pratiquement nul, sauf pour l'intervalle 30-75 où l'on enregistre une perte d'espérance de vie. Cette perte est maximale dans l'intervalle 60-65 ; elle prend alors une valeur proche de quatre mois.

Au delà de 80 ans, on remarque une légère augmentation d'espérance de vie.

Globalement, on enregistre un recul de l'espérance de vie.

Tableau V.

x	$\frac{q_x \text{ Hommes}}{q_x \text{ Femmes}}$ 1968-1972	$\frac{q_x \text{ Hommes}}{q_x \text{ Femmes}}$ 1959-1963
0	1.356	1.299
1	1.202	1.081
2	1.162	1.167
3	1.373	1.387
4	1.351	1.382
5	1.454	1.235
6	1.710	1.306
7	1.401	1.410
8	1.198	1.563
9	1.432	1.367
10	1.697	1.576
11	1.358	1.206
12	1.357	1.387
13	1.557	1.607
14	1.748	2.071
15	1.974	2.029
16	2.300	2.250
17	2.713	2.227
18	2.454	2.800
19	2.690	2.469
20	2.521	2.545
21	2.780	3.036
22	2.719	2.683
23	2.452	2.415
24	2.505	2.704
25	1.809	2.306
26	2.307	2.250
27	2.027	2.000
28	1.914	1.628
29	1.779	2.200
30	2.041	1.940
31	1.960	2.205
32	1.830	1.670
33	1.703	1.607
34	1.757	1.622
35	1.806	1.508
36	1.578	1.551
37	1.852	1.514
38	1.675	1.567
39	1.484	1.738
40	1.825	1.549
41	1.715	1.505
42	1.762	1.801
43	1.635	1.714
44	1.641	1.753
45	1.826	1.747
46	1.706	1.644
47	1.765	1.726
48	1.716	1.786
49	1.750	1.867
50	1.748	1.943

x	$\frac{q_x \text{ Hommes}}{q_x \text{ Femmes}}$ 1968-1972	$\frac{q_x \text{ Hommes}}{q_x \text{ Femmes}}$ 1959-1963
51	1.989	1.937
52	1.847	2.056
53	2.047	2.076
54	1.926	2.113
55	2.062	2.057
56	2.114	2.136
57	2.056	2.163
58	2.033	2.172
59	2.172	2.102
60	2.146	2.093
61	2.184	2.041
62	2.139	2.007
63	2.148	1.988
64	2.117	1.893
65	2.052	1.869
66	2.087	1.796
67	1.953	1.779
68	1.967	1.645
69	1.900	1.606
70	1.825	1.624
71	1.756	1.469
72	1.717	1.430
73	1.611	1.366
74	1.589	1.380
75	1.532	1.355
76	1.497	1.341
77	1.419	1.290
78	1.400	1.241
79	1.336	1.244
80	1.324	1.203
81	1.267	1.214
82	1.384	1.243
83	1.208	1.221
84	1.208	1.205
85	1.187	1.195
86	1.171	1.163
87	1.137	1.165
88	1.173	1.146
89	1.167	1.189
90	1.174	1.150
91	1.130	1.144
92	1.125	1.135
93	1.071	1.131
94	1.225	1.153
95	1.096	1.240
96	1.097	1.239
97	1.027	1.109
98	0.892	0.953
99	1.026	1.199

Tableau VI. — Évolution de l'espérance de vie à l'âge x.

x	$\mathring{e}_x$ Femmes 1959-1963	$\mathring{e}_x$ Femmes 1968-1972	Variation	x	$\mathring{e}_x$ Hommes 1959-1963	$\mathring{e}_x$ Hommes 1968-1972	Variation	x
0	73.04	74.21	1.17	0	67.16	67.79	0.63	0
1	73.90	74.53	0.63	1	68.39	68.44	0.05	1
2	73.03	73.63	0.60	2	67.52	67.55	0.03	2
3	72.10	72.69	0.59	3	66.59	66.61	0.02	3
4	71.14	71.73	0.59	4	65.65	65.66	0.01	4
5	70.18	70.77	0.59	5	64.70	64.71	0.01	5
6	69.22	69.79	0.57	6	63.74	63.75	0.01	6
7	68.25	68.82	0.57	7	62.78	62.78	0.00	7
8	67.28	67.84	0.56	8	61.82	61.81	−0.01	8
9	66.30	66.86	0.56	9	60.85	60.84	−0.01	9
10	65.32	65.88	0.56	10	59.87	59.86	−0.01	10
11	64.34	64.90	0.56	11	58.90	58.89	−0.01	11
12	63.36	63.92	0.56	12	57.93	57.91	−0.02	12
13	62.38	62.94	0.56	13	56.95	56.94	−0.01	13
14	61.40	61.96	0.56	14	55.98	55.96	−0.02	14
15	60.41	60.98	0.57	15	55.01	54.99	−0.02	15
16	59.43	60.00	0.57	16	54.05	54.03	−0.02	16
17	58.46	59.02	0.56	17	53.09	53.08	−0.01	17
18	57.48	58.05	0.57	18	52.14	52.14	0.00	18
19	56.50	57.08	0.58	19	51.20	51.21	0.01	19
20	55.53	56.11	0.58	20	50.26	50.29	0.03	20
21	54.56	55.15	0.59	21	49.33	49.36	0.03	21
22	53.59	54.18	0.59	22	48.41	48.44	0.03	22
23	52.63	53.21	0.58	23	47.49	47.51	0.02	23
24	51.66	52.23	0.57	24	46.57	46.57	0.00	24
25	50.69	51.26	0.57	25	45.63	45.64	0.01	25
26	49.72	50.30	0.58	26	44.70	44.69	0.01	26
27	48.75	49.33	0.58	27	43.76	43.76	0.00	27
28	47.78	48.36	0.58	28	42.82	42.82	0.00	28
29	46.82	47.39	0.57	29	41.88	41.87	−0.01	29
30	45.86	46.43	0.57	30	40.94	40.93	−0.01	30
31	44.89	45.46	0.57	31	40.01	39.99	−0.02	31
32	43.93	44.50	0.57	32	39.08	39.05	−0.03	32
33	42.97	43.53	0.56	33	38.14	38.11	−0.03	33
34	42.01	42.57	0.56	34	37.20	37.17	−0.03	34
35	41.06	41.61	0.55	35	36.27	36.23	−0.04	35
36	40.11	40.65	0.54	36	35.34	35.29	−0.05	36
37	39.17	39.71	0.54	37	34.41	34.36	−0.05	37
38	38.22	38.75	0.53	38	33.49	33.43	−0.06	38
39	37.28	37.80	0.52	39	32.57	32.50	−0.07	39
40	36.34	36.86	0.52	40	31.66	31.58	−0.08	40
41	35.41	35.92	0.51	41	30.75	30.67	−0.08	41
42	34.48	34.98	0.50	42	29.84	29.76	−0.08	42
43	33.55	34.05	0.50	43	28.95	28.87	−0.08	43
44	32.62	33.13	0.51	44	28.06	27.97	−0.09	44
45	31.70	32.21	0.51	45	27.18	27.08	−0.10	45
46	30.79	31.29	0.50	46	26.31	26.21	−0.10	46
47	29.89	30.38	0.49	47	25.44	25.34	−0.10	47
48	28.99	29.48	0.49	48	24.59	24.49	−0.10	48
49	28.09	28.58	0.49	49	23.75	23.63	−0.12	49
50	27.20	27.69	0.49	50	22.93	22.79	−0.14	50
51	26.31	26.82	0.51	51	22.11	21.97	−0.14	51
52	25.44	25.94	0.50	52	21.31	21.17	−0.14	52
53	24.56	25.07	0.51	53	20.53	20.37	−0.16	53
54	23.70	24.20	0.50	54	19.76	19.59	−0.17	54
55	22.84	23.35	0.51	55	19.01	18.82	−0.19	55
56	21.99	22.51	0.52	56	18.27	18.08	−0.19	56

x	$\mathring{e}_x$ Femmes 1959-1963	$\mathring{e}_x$ Femmes 1968-1972	Variation	x	$\mathring{e}_x$ Hommes 1959-1963	$\mathring{e}_x$ Hommes 1968-1972	Variation	x
57	21.15	21.66	0.51	57	17.56	17.34	−0.22	57
58	20.32	20.83	0.51	58	16.86	16.61	−0.25	58
59	19.50	20.00	0.50	59	16.18	15.90	−0.28	59
60	18.69	19.19	0.50	60	15.52	15.22	−0.30	60
61	17.89	18.38	0.49	61	14.87	14.55	−0.32	61
62	17.10	17.58	0.48	62	14.23	13.91	−0.32	62
63	16.33	16.81	0.48	63	13.62	13.28	−0.34	63
64	15.57	16.04	0.47	64	13.03	12.69	−0.34	64
65	14.83	15.29	0.46	65	12.44	12.10	−0.34	65
66	14.11	14.55	0.44	66	11.87	11.53	−0.34	66
67	13.39	13.83	0.44	67	11.31	11.00	−0.31	67
68	12.69	13.12	0.43	68	10.77	10.46	−0.31	68
69	12.02	12.44	0.42	69	10.22	9.96	−0.26	69
70	11.36	11.77	0.41	70	9.70	9.47	−0.23	70
71	10.72	11.12	0.40	71	9.20	9.00	−0.20	71
72	10.11	10.50	0.39	72	8.69	8.54	−0.15	72
73	9.52	9.90	0.38	73	8.21	8.11	−0.10	73
74	8.96	9.32	0.36	74	7.72	7.68	−0.04	74
75	8.41	8.76	0.35	75	7.27	7.26	−0.01	75
76	7.88	8.23	0.35	76	6.83	6.87	0.04	76
77	7.39	7.71	0.32	77	6.43	6.48	0.05	77
78	6.93	7.23	0.30	78	6.04	6.11	0.07	78
79	6.49	6.76	0.27	79	5.65	5.75	0.10	79
80	6.07	6.33	0.26	80	5.29	5.41	0.12	80
81	5.68	5.93	0.25	81	4.93	5.10	0.17	81
82	5.30	5.54	0.24	82	4.59	4.77	0.18	82
83	4.93	5.11	0.18	83	4.29	4.47	0.18	83
84	4.60	4.78	0.18	84	4.01	4.19	0.18	84
85	4.30	4.46	0.16	85	3.75	3.92	0.17	85
86	4.01	4.17	0.16	86	3.52	3.68	0.16	86
87	3.75	3.89	0.14	87	3.28	3.44	0.16	87
88	3.53	3.64	0.11	88	3.08	3.21	0.13	88
89	3.30	3.39	0.09	89	2.87	2.99	0.12	89
90	3.08	3.18	0.10	90	2.70	2.82	0.12	90
91	2.89	2.97	0.08	91	2.53	2.67	0.14	91
92	2.72	2.78	0.06	92	2.37	2.51	0.14	92
93	2.56	2.60	0.04	93	2.22	2.36	0.14	93
94	2.40	2.46	0.06	94	2.06	2.20	0.14	94
95	2.25	2.24	−0.01	95	1.92	2.12	0.20	95
96	2.06	2.03	−0.03	96	1.83	1.96	0.13	96
97	1.78	1.83	0.05	97	1.69	1.84	0.15	97
98	1.53	1.55	0.02	98	1.52	1.61	0.09	98
99	1.16	1.14	−0.02	99	1.09	1.13	0.04	99

c. *Conclusions.*

On à résumé ci-dessous les différentes observations relevées au cours de cette étude.

i — La probabilité de décès a diminué sur la période 1959-1972. Cette diminution est de faible amplitude.

Pour la population masculine, on observe le phénomène inverse dans les intervalles 15-20 et 62-80.

ii — Les taux de mortalité infantile ont fortement diminué. Ils restent cependant élevés par rapport à ceux constatés dans certains pays voisins.

iii — La surmortalité masculine continue à être observée; elle s'est aggravée dans les intervalles 30-40 et 60-80.

iv — L'espérance de vie à la naissance enregistre une augmentation de 14 mois dans la population féminine et de 7 mois dans la population masculine.

Pour les femmes, on observe un progrès à tout âge. Ce progrès n'est pas très important.

Pour les hommes, on observe un gain d'espérance de vie pratiquement nul, sauf pour l'intervalle 30-75 où l'on observe une perte d'espérance de vie; cette perte passe par un maximum entre 60 et 65 ans.

*

Tout semble indiquer que, sauf circonstances nouvelles et imprévisibles, il faille s'attendre en Belgique, dans les années à venir, à une stabilisation de la mortalité avec localement et pour la population masculine, des aggravations probables.

* * *

II. Ajustement pour des besoins actuariels des tables de mortalité brutes 1968-1972

1. — Introduction.

A l'occasion de la publication des tables de mortalité brutes pour la période 1968-1972, il nous a paru intéressant de présenter simultanément des tables de mortalité ajustées dans une optique actuarielle.

Cet article se propose d'établir et de commenter les tables de mortalité ajustées suivantes :
— HS (1968-1972) : table ajustée pour la population masculine, dans un schéma unique de Makeham.
— HD (1968-1972) : table ajustée pour la population masculine, dans deux schémas de Makeham.
— HFR (1968-1972) : table ajustée pour la population entière, dans un schéma unique de Makeham.

Les deux premières tables (HS et HD) sont proposées pour les opérations de genre décès. La dernière (HFR) est proposée pour les opérations de genre vie.

* * *

2. — Les principes de l'ajustement.

a. *Choix des tables brutes.*

Pour qu'une table ajustée puisse être utilisée pour les besoins actuariels, il faut que la table brute de base soit suffisamment représentative de la mortalité des assurés, et que l'ajustement ne déforme pas les caractéristiques de la table brute.

Deux options principales se présentent :
— celle des tables de mortalité basées sur la population générale.
— celle des tables d'expérience des entreprises d'assurances.

Ces dernières tables, excellentes comme moyen de contrôle, laissent à désirer pour l'établissement des tarifs et des réserves mathématiques : la population des assurés et, a fortiori, le nombre de décès à chaque âge, étant trop faibles pour n'être point sujets à écarts importants. On pourrait pallier en partie cet inconvénient, en cumulant les observations d'un grand nombre d'entreprises et d'années. Mais cette technique aurait pour conséquences d'hétérogénéiser l'échantillon et de masquer l'évolution de la mortalité.

Les tables de population générale ont au contraire l'avantage du grand nombre et la vulgarisation de l'assurance-vie a contribué à rapprocher cette population de celle des assurés.

L'existence dans certains cas, de différences importantes n'est pas irréductible, pour autant que les motifs et les mesures de ces différences puissent être trouvés, ce qui permet de corriger adéquatement la table brute avant l'ajustement.

L'existence, au sein d'une même entreprise, d'opérations très différentes, justifie l'utilisation d'au moins deux tables de mortalité. Ces opérations peuvent en effet, être partagées en deux groupes principaux :
— les opérations de genre décès, entendant par là celles pour lesquelles les primes pures varient en raison directe de la mortalité des assurés.
— les opérations de genre vie, entendant par là celles qui présentent la caractéristique inverse.

Remarquons qu'une opération peut être de genres différents dans certains intervalles de temps, ou à l'égard des divers assurés sur la vie desquels elle est souscrite.

Ces dernières considérations peuvent justifier l'usage de plusieurs tables de mortalité pour un même assuré, ou de tables différentes pour chaque assuré et simultanément dans une même opération (1).

*

Il a été constaté qu'en général, et principalement pour des motifs d'antisélection, la mortalité des assurés en cas de vie était plus basse que celle des assurés en cas de décès, la différence devenant sensible aux âges élevés.

(1) Rappelons que ce n'est pas la table, mais la loi de mortalité suivie par l'assuré ou le status assuré qui détermine, avec la loi de placement financière, la valeur actuelle d'un engagement viager. La table de mortalité n'est qu'un tableau dont, moyennant certaines hypothèses, on peut déduire univoquement la loi de mortalité. En modifiant ces hypothèses, on peut tirer aussi bien une loi unique de tables différentes, qu'une infinité de lois différentes d'une table unique.

Une table de mortalité offrant une sécurité suffisante pour un groupe d'opérations devenait donc insuffisante ou dangereuse pour l'autre.

C'est la raison pour laquelle deux tables au moins (une par groupe d'opérations) sont utilisées.

* * *

b. *Choix de l'ajustement.*

Théoriquement, on pourrait utiliser les tables brutes pour les calculs actuariels. Mais il en résulterait de nombreuses irrégularités dans les fonctions actuarielles; ces irrégularités seraient d'autant plus fâcheuses qu'elles seraient dues en grande partie à des écarts accidentels.

Parmi les nombreux procédés d'ajustement, on a choisi l'ajustement analytique de Makeham, pour lequel le nombre de survivants à l'âge x, est donné par :

$$l_x = l_{x_0} s^{x-x_0} g^{c^x - c^{x_0}}$$

$$x_0 \leqslant x \leqslant \Omega : l_\Omega = 0,$$

où : s, g et c sont les constantes caractéristiques de cette loi.

x_0 est l'origine choisie pour l'ajustement.

L'ajustement de Makeham présente le grand avantage de commodité d'utilisation. Il a été de ce fait utilisé, en tout ou partie, dans la plupart des ajustements destinés à des fins actuarielles.

Il n'est cependant pas sans défaut :
- — d'abord parce qu'il ne convient pas aux âges extrêmes de la table (2).
- — ensuite, parce que même dans l'intervalle où il est acceptable, il ne constitue jamais qu'une approximation d'une loi de mortalité réelle trop complexe pour se laisser enfermer dans un schéma aussi élaboré soit-il.

* * *

c. *Conditions de régularité, de sécurité et de compensation favorable* (3).

i — La marge de sécurité que l'on peut rechercher sur la mortalité doit résulter suffisamment du choix de la table brute, de l'introduction de chargements explicites, des règles de sélection des assurés, pour qu'il ne soit pas utile d'en ajouter systématiquement par le truchement de l'ajustement, ce qui aurait d'ailleurs comme conséquence de fausser l'opinion de l'actuaire sur le rapport entre la mortalité attendue et la mortalité constatée.

Les graphes des taux de mortalité bruts et ajustés doivent donc être les plus voisins possible, en rendant minima, dans les intervalles où les écarts sont de même signe, non seulement ces écarts, mais aussi l'amplitude de ces intervalles.

C'est ce que nous appelons la « condition de régularité ». Elle va de pair avec l'optimisation statistique.

ii — On ne peut considérer comme équivalents deux écarts de même valeur absolue mais de signe contraire, entre un taux brut et un taux ajusté. Même si on ne fait pas intervenir les incidences d'une sous-tarification sur la solvabilité d'une entreprise, et cela pour les raisons exposées ci-dessus, il n'en reste pas moins vrai que, sur une assurance de risque pur, par exemple, les pertes causées par une sous-mortalité de taux $-a$ sont aux bénéfices laissés par une surmortalité de taux a, dans le rapport :

$$\frac{1+ab}{1-ab},$$

où b est un nombre positif pouvant être égal voire supérieur à l'unité, dépendant de la stratégie du preneur à l'égard de la tarification.

Il y a donc lieu de tenir compte d'une certaine préférence en faveur des écarts qui vont dans le sens de la sécurité, aux dépens des écarts de sens opposé.

C'est ce que nous appelons la « condition de sécurité » qui n'est pas à confondre avec la recherche d'une marge de sécurité.

iii — Faute de valeurs précises pour la quantité b, on se résignera à rechercher un compromis entre les conditions de régularité et de sécurité, apparemment contradictoires, en attribuant, dans la mesure du

(2) Cependant, compte tenu du montant des capitaux sous risque et du genre des combinaisons, relatifs à ces âges, on peut l'estimer acceptable si la moyenne pondérée des taux ajustés en fonction des capitaux sous risque, correspond en ordre de grandeur à celle des taux bruts.

(3) Voir : « *A propos d'ajustements makehamiens d'une table de mortalité.* » Y. BALLEGEER et J.P. ANDRE-DUMONT – Bulletin de Statistique, Déc. 1974.

possible, les écarts qui vont dans le sens de la sécurité aux âges où les capitaux sous risque sont les plus élevés en valeur absolue.

C'est ce que nous appelons la « compensation favorable ».

A quelques exceptions près, dont les rentes viagères immédiates, les combinaisons d'assurance ont un capital sous risque qui décroît avec le temps. Ainsi, la prime étant supposée périodique, dans l'assurance mixte de capital C, le capital sous risque varie de C (à l'origine) à la valeur zéro (au terme), tandis que dans l'assurance de capital différé, il varie de la valeur zéro à $-C$.

La compensation favorable tend donc, en général, aussi bien en cas de décès qu'en cas de vie, à étaler la mortalité, c.-à-d. à diminuer, dans la première partie de la table tout au moins, la valeur du rapport

$$\frac{\mu'_x}{\mu_x}.$$

* * *

d. *Rôle des constantes de Makeham.*

Dans un schéma de Makeham, le taux instantané de mortalité est donné par :

$$\mu_x = -\ln s - c^x \ln g(\ln c), \text{ où :}$$

$$0 < s < 1$$

$$0 < g < 1$$

$$c > 1 \quad .$$

Soient :

$X_0 \geqslant 0$, l'âge initial de l'ajustement.

$X_w \leqslant \Omega : l_\Omega = 0$, l'âge terminal de l'ajustement.

x_1, x_2, x_3 des entiers tels que :

$$X_0 \leqslant x_1 \leqslant X_0 + \frac{X_w - X_0}{3}$$

$$X_0 + \frac{X_w - X_0}{3} \leqslant x_2 \leqslant X_0 + \frac{2(X_w - X_0)}{3}$$

$$X_0 + \frac{2(X_w - X_0)}{3} \leqslant x_3 \leqslant X_w$$

$$x_3 - x_2 = x_2 - x_1.$$

i — En faisant tendre c vers l'infini et g vers 1, on peut donner à μ_x un rayon de courbure aussi petit que l'on veut, en un point quelconque x, choisi par exemple dans l'intervalle (x_2, x_3).

Il en résulte que $\frac{\mu_{x_3}}{\mu_{x_2}}$ peut alors devenir aussi grand que l'on veut, $\frac{\mu_{x_2}}{\mu_{x_1}}$ restant inférieur à une quantité déterminée.

ii — Si l'on fait tendre c vers 1 et g vers 0, on peut au contraire donner à μ_x un rayon de courbure aussi grand que l'on veut; le graphe de μ_x tend dans ce cas à devenir une droite.

Il en résulte que $\mu_{x_2} - \mu_{x_1}$ peut devenir, si s tend vers 1, aussi grand que l'on veut, sans que le rapport $\frac{\mu_{x_3} + \mu_{x_1}}{2\mu_{x_2}}$ dépasse une valeur quelconque fixée supérieure à 1.

iii — Si l'on fait tendre c et g vers 1, le graphe de μ_x tend vers une droite parallèle à l'axe $0x$. Il en résulte que $\mu_{x_2} - \mu_{x_1}$ et $\mu_{x_3} - \mu_{x_2}$ peuvent être rendus aussi petits que l'on veut sans que μ_{x_1} soit inférieur à une quantité fixée.

iv — L'importance relative de c dans l'expression de μ_x est croissante avec l'âge, celle de s est au contraire décroissante; celle de g croît d'abord aux dépens de celle de s, puis décroît au profit de celle de c.

v — Si l'on donne à c un accroissement Δc, en imposant à μ_{x_1} et μ_{x_3} de rester constant, les valeurs $c + \Delta c, g + \Delta g, s + \Delta s$ qui résultent de ces conditions (pour autant qu'elles soient compatibles avec les domaines de s, g, c) sont telles que μ_x varie en sens inverse de Δc pour $x_1 < x < x_3$, dans le même sens pour $x > x_3$ et $x < x_1$.

Si au lieu c, on prend respectivement g ou s comme variable indépendante, les conclusions précédentes subsistent en fonction respectivement des accroissements Δg et $\Delta(1 - s) \equiv -\Delta s$.

*

Ces propriétés permettent de combiner les conditions de régularité, de sécurité et de compensation favorable avec l'optimisation statistique.

* * *

3. — Application aux opérations de genre décès.

La table de mortalité de la population générale masculine a été choisie pour les opérations de genre décès; elle présente en effet, une sécurité suffisante sans être excessive.

Cette table brute peut être subdivisée (4) en plusieurs intervalles partiels principaux, désignés dans le tableau ci-dessous par une lettre majuscule, et des intervalles intermédiaires appelés charnières et désignés par le couple de lettres des intervalles adjacents.

Intervalle	Etendue	Observations
A	0-11	Zone infantile, à mortalité décroissante et inajustable dans le schéma de Makeham.
AB	12-14	Charnière entre A et B.
B	15-33	Bosse de la mortalité juvénile et mortalité en plateau dans le sous-intervalle 18-31.
BC	34-35	Charnière entre B et C.
C	36-66	Partie centrale de la table, à mortalité fortement croissante.
CD	67-70	Charnière entre C et D.
D	71-90	Dernière zone ajustable, à accroissement de mortalité atténué.
DE	91-94	Charnière entre D et E.
E	$\geqslant$ 95	Zone terminale inajustable.

La nette variation de la fonction $\frac{\mu'_x}{\mu_x}$ lors du passage de C en D, ne permet que les solutions suivantes :

— ajustement unique, convenable au-delà de 60 ans, avec très forte surmortalité en deçà.
— ajustement unique, convenable jusqu'à 66 ans, avec forte surmortalité au-delà.
— ajustement unique avec surmortalité modérée jusqu'à 50 ans, sous-mortalité de 50 à 75 ans, et surmortalité au-delà.
— ajustement double, les deux lois de Makeham se raccordant par le taux instantané de mortalité et le nombre de survivants, en un point de la charnière CD.

*

On a retenu les deux dernières solutions; la première a donné naissance à la table Hommes « Singulum » notée :

HS (1968-1972),

la seconde a donné naissance à la table Hommes « Duplum » notée :

HD (1968-1972).

*

Quoique le point de jonction le meilleur pour la qualité des ajustements se trouvât un peu plus bas, on a choisi l'âge 70 pour des raisons pratiques. Il s'agit en effet de l'âge-terme extrême des opérations temporaires (donc autres que les opérations sur la vie entière), qui suivraient ainsi, pendant toute leur

(4) Cette subdivision ne répond pas à des considérations biométriques mais uniquement à la notion analytique d'ajustabilité suivant la loi de Makeham.

durée, une loi de mortalité répondant à un ajustement unique.

* * *

4. — Application aux opérations de genre vie.

Pour les âges jeunes une sécurité excessive ne se justifie nullement, tandis que pour les âges élevés où les assurés sont en général des rentiers qui, en raison de leur mode de vie et de l'antisélection, suivent une mortalité spéciale, une table de mortalité générale est insuffisante.

Aussi, plutôt que de prendre la table de mortalité brute de la population féminine, qui laisse à désirer à l'un et l'autre point de vue, on a choisi la table de mortalité brute de la population entière, mais manipulée par un ensemble de corrections permettant l'usage d'une table unique pour les opérations de genre vie.

*

Monsieur Jacques LOISEL a observé (5) que pour les âges les plus courants de souscription des rentes, l'effet de l'antisélection des rentiers était équivalent à une sous-mortalité de :

94,94 %	la première année
84,94 %	la deuxième année
52,57 %	la troisième année
32,07 %	la quatrième année
1,32 %	la cinquième année.

Appliquées directement, ces corrections exigent l'établissement de tables de mortalité par âge à l'entrée. Aussi a-t-on recherché quelles étaient les corrections par âge, indépendantes de l'âge à l'entrée, mais qui pour un taux d'intérêt [5 %] et une table [H(1959-63)M_k] donnés étaient équivalentes pour l'opération « rente viagère immédiate » aux corrections de Monsieur LOISEL.

Si $\ddot{a}_x$ et a_x désignent respectivement les valeurs des rentes viagères anticipative et à terme échu pour la table sans correction, tandis que $\ddot{a}'_x$ et a'_x désignent ces mêmes éléments après application des corrections de Monsieur LOISEL à l'âge d'entrée x, on a :

$$\theta_x = \frac{p_x}{q_x} \cdot \frac{a'_x \cdot \ddot{a}_{x+1} - a_x \cdot \ddot{a}'_{x+1}}{a_x \cdot \ddot{a}'_{x+1}},$$

où θ_x est le coefficient de sous-mortalité à appliquer aux taux de mortalité annuels q_x de la table en cause, indépendamment d'un âge à l'entrée, pour retrouver les $\ddot{a}'_x$ et a'_x établis par âge à l'entrée.

Il a été jugé nécessaire d'ajuster les taux trouvés parce que les coefficients correctifs de Monsieur LOISEL sont manifestement trop élevés pour des têtes très âgées et pour des têtes jeunes.

Les θ_x bruts ont été ajustés par une fonction du second degré à dérivée seconde positive jusqu'à 75 ans, négative jusqu'à 84 ans avec comme conditions :

$$\theta_{59} = 0 \ ; \ \theta_{84} = \theta_{85} \ ; \ \theta_{x \geqslant 85} \simeq 0{,}25.$$

On a alors le tableau suivant des θ_x bruts et ajustés :

x	θ_x brut	θ_x ajusté
60	0.0360	0.0100
64	0.0642	0.0530
68	0.1006	0.1008
72	0.1486	0.1534
76	0.2034	0.2028
80	0.2652	0.2418
84	0.3338	0.2568

Ces taux ajustés appliquées aux q_x de la table de mortalité brute de la population entière ont donné les taux de mortalité :

$$q'_x = (1 - \theta_x) q_x$$

de la table brute corrigée, qui a été choisie pour l'ajustement.

La table de mortalité de la population entière, ainsi manipulée, présente des caractéristiques assez semblables à celles de la table de mortalité de la population générale masculine, d'autant plus que les corrections ont précisément comme effet de renforcer l'affaissement relatif de la mortalité aux âges élevés.

Comme il s'agit d'une table destinée aux opérations de genre vie, il n'est pas nécessaire de prévoir un ajustement double (comme dans le cas de la table destinée aux opérations de genre décès).

Celle-ci se présente alors comme suit :

(5) J. LOISEL. – « *Critères d'homogénéité des classes de risques des personnes conscientes de leur inassurabilité en assurance sur la vie* » – (B.A.R.A.B. n° 66 – 1971).

x	q_x	q'_x	x	q_x	q'_x
< 60	$q_x = q'_x$		76	0.070287	0.056033
60	0.015897	0.015738	77	0.077535	0.060880
61	0.017472	0.017117	78	0.084538	0.065492
62	0.019708	0.019099	79	0.095106	0.072823
63	0.021739	0.020830	80	0.103184	0.078234
64	0.023343	0.022106	81	0.111628	0.083967
65	0.026019	0.024341	82	0.116173	0.086863
66	0.028939	0.026731	83	0.136814	0.101885
67	0.030915	0.028182	84	0.147324	0.109491
68	0.034295	0.030838	85	0.162740	0.120948
69	0.037562	0.033299	86	0.175353	0.130322
70	0.041522	0.036269	87	0.190522	0.141596
71	0.045088	0.038785	88	0.203812	0.151473
72	0.049556	0.041954	89	0.226246	0.168146
73	0.053823	0.044818	90	0.242442	0.180183
74	0.058866	0.048182	> 90	$q'_x = q_x \cdot 0{,}7432$	
75	0.064598	0.051937			

Une méthode d'ajustement unique a donc été utilisée. Elle a donné naissance à la table (6) ajustée :

HFR (1968-1972).

* * *

5. — Résultats.

a. *La technique des moindres carrés.*

Les différents ajustements effectués dans cette étude ont été menés à partir du principe des moindres carrés appliqué à la probabilité de décès à l'âge x (7) :

$$q_x = 1 - sg^{c^x(c-1)}$$

La somme à rendre minimum a pour expression :

$$S = \sum_{x=A}^{x=B} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2$$

où : $0 \leqslant A < B \leqslant \Omega : l_\Omega = 0.$

Les conditions nécessaires d'extremum :

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{\partial S}{\partial g} = \frac{\partial S}{\partial c} = 0,$$

conduisent au système des équations normales :

$$F_1(s, g, c) = \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} g^{c^x(c-1)} - s\Sigma g^{2c^x(c-1)} = 0$$

$$F_2(s, g, c) =$$

$$\Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} c^x g^{c^x(c-1)-1} - s\Sigma c^x g^{2c^x(c-1)-1} = 0$$

$$F_3(s, g, c) = \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} g^{c^x(c-1)} c^{x-1}[(x+1)c - x]$$

$$- s\Sigma g^{2c^x(c-1)} c^{x-1}[(x+1)c - x] = 0$$

Ce système non linéaire de trois équations à trois inconnues est résolu par la méthode itérative de NEWTON-RAPHSON.

Les éléments de la matrice de JACOBI se calculent par les formules suivantes :

$$M(1,1) = \frac{\partial F_1}{\partial s} = -\Sigma g^{2c^x(c-1)}$$

$$M(1,2) = \frac{\partial F_1}{\partial g} = \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} c^x(c-1) g^{c^x(c-1)-1}$$

$$- 2s\Sigma c^x(c-1) g^{2c^x(c-1)-1}$$

$$M(1,3) = \frac{\partial F_1}{\partial c} =$$

$$(\ln g)\Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} g^{c^x(c-1)} [(x+1)c - x] c^{x-1}$$

$$- 2s(\ln g)\Sigma g^{2c^x(c-1)}\, c^{x-1}\, [(x+1)c - x]$$

(6) Le sigle HFR provient de « Hommes-Femmes », Rentes.
On a utilisé le sigle HF, plutôt que MF ou MV, par similitude de notations avec les tables visées à l'A.R. du 30.9.1968.

(7) Voir : « *Ajustements makehamiens, optimaux aux sens des moindres carrés, d'une table de mortalité sur un intervalle d'âge déterminé.* » – Y. BALLEGEER – Bulletin de Statistique, Mai 1973.

$$M(2,1) = \frac{\partial F_2}{\partial s} = -\Sigma c^x g^{2c^x(c-1)-1}$$

$$M(2,2) = \frac{\partial F_2}{\partial g} = \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} c^x[(c-1)c^x - 1]g^{c^x(c-1)-2}$$

$$- s\Sigma c^x[2(c-1)c^x - 1]g^{2c^x(c-1)-2}$$

$$M(2,3) = \frac{\partial F_2}{\partial c} = \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} x c^{x-1} g^{c^x(c-1)-1}$$

$$+ (lng)\Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} c^{2x-1} g^{c^x(c-1)-1}[(x+1)c - x]$$

$$- s\Sigma x c^{x-1} g^{2c^x(c-1)-1}$$

$$- 2s(lng)\Sigma c^{2x-1}[(x+1)c - x]g^{2c^x(c-1)-1}$$

$$M(3,1) = \frac{\partial F_3}{\partial s} = -\Sigma g^{2c^x(c-1)} c^{x-1}[(x+1)c - x]$$

$$M(3,2) = \frac{\partial F_3}{\partial g} =$$

$$\Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x}[(x+1)c - x]c^{2x-1}(c-1)g^{c^x(c-1)-1}$$

$$- 2s\Sigma c^{2x-1}[(x+1)c - x](c-1)g^{2c^x(c-1)-1}$$

$$M(3,3) = \frac{\partial F_3}{\partial c} =$$

$$(lng)\Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} c^{2(x-1)}[(x+1)c - x]^2 g^{c^x(c-1)}$$

$$- 2s(lng)\Sigma c^{2(x-1)}[(x+1)c - x]^2 g^{2c^x(c-1)}$$

$$+ \Sigma \frac{l_{x+1}}{l_x} g^{c^x(c-1)} c^{x-2}[x(x+1)c - x(x-1)]$$

$$- s\Sigma g^{2c^x(c-1)}[x(x+1)c - x(x-1)]c^{x-2}$$

Remarques.

1 — Suivant les choix effectués aux paragraphes 5.b, 5.c et 5.d, le système des équations normales d'ordre trois ci-dessus, pourra se réduire à un système non linéaire d'ordre 2, et parfois à une équation non linéaire à une seule inconnue. Le principe de la résolution de ces systèmes reste cependant invariable.

2 — La méthode itérative s'arrête lorsque le plus grand des écarts $|s_{n+1} - s_n|$, $|g_{n+1} - g_n|$, $|c_{n+1} - c_n|$ devient plus petit que la quantité 10^{-12}.

3 — En annexe 1, on trouvera les principes généraux ayant conduit au choix des bornes pour les divers ajustements.

b. *La table ajustée* HS (1968-1972).

α — On recherche le minimum de :

$$S = \sum_{x=15}^{x=70} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2.$$

A partir des valeurs initiales :

$$s_0 = 0.999\ \ 252$$
$$g_0 = 0.999\ \ 478$$
$$c_0 = 1.104\ \ 200\ ,$$

la méthode de NEWTON-RAPHSON conduit aux valeurs suivantes :

$$s \equiv s_1 = 0.999\ \ 681\ \ 385\ \ 770$$
$$g \equiv g_1 = 0.999\ \ 466\ \ 603\ \ 646$$
$$c \equiv c_1 = 1.104\ \ 530\ \ 045\ \ 291$$

β — On recherche le minimum de :

$$S = \sum_{x=15}^{x=35} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2$$

où g et c sont fixés respectivement aux valeurs g_1 et c_1.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit à la valeur :

$$s \equiv s_2 = 0.999\ \ 407\ \ 845\ \ 556\ .$$

γ — On recherche le minimum de :

$$S = \sum_{x=15}^{x=70} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2,$$

où s est fixée à sa valeur s_2.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit aux valeurs :

$$g \equiv g_2 = 0.999\ \ 534\ \ 389\ \ 625$$
$$c \equiv c_2 = 1.106\ \ 379\ \ 997\ \ 174\ .$$

δ — On recherche le minimum de :

$$S = \sum_{x=15}^{x=77} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)}\right]^2,$$

où s et g sont fixés respectivement aux valeurs s_2 et g_2.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit à la valeur :

$$c \equiv c_3 = 1.105 \quad 046 \quad 034 \quad 668 \quad .$$

L'ajustement HS (1968-1972) est alors complètement défini par les valeurs :

$$s^* \equiv s_2 = 0.999 \quad 407 \quad 845 \quad 556$$

$$g^* \equiv g_2 = 0.999 \quad 534 \quad 389 \quad 625$$

$$c^* \equiv c_3 = 1.105 \quad 046 \quad 034 \quad 668$$

Le tableau I donne la table HS (1968-1972). Ce tableau comporte sept colonnes donnant respectivement :

x : âge.

l_x : nombre de survivants à l'âge x ($l_0 = 10^6$).

d_x : nombre de décès à l'âge x.

p_x : probabilité de survie à l'âge x.

q_x : probabilité de décès à l'âge x.

μ_x : taux instantané de mortalité à l'âge x.

x : âge.

Tableau I. Table ajustée HS (1968-1972).

x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
0	1000000	641	0.999359	0.000641	0.000639	0
1	999359	646	0.999354	0.000646	0.000644	1
2	998713	651	0.999348	0.000652	0.000649	2
3	998062	657	0.999342	0.000658	0.000655	3
4	997405	663	0.999335	0.000665	0.000662	4
5	996742	671	0.999327	0.000673	0.000669	5
6	996071	678	0.999319	0.000681	0.000677	6
7	995393	687	0.999309	0.000691	0.000686	7
8	994706	698	0.999299	0.000701	0.000696	8
9	994008	708	0.999288	0.000712	0.000707	9
10	993300	720	0.999275	0.000725	0.000719	10
11	992580	733	0.999261	0.000739	0.000732	11
12	991847	748	0.999246	0.000754	0.000747	12
13	991099	764	0.999229	0.000771	0.000763	13
14	990335	783	0.999210	0.000790	0.000781	14
15	989552	802	0.999189	0.000811	0.000800	15
16	988750	825	0.999166	0.000834	0.000822	16
17	987925	849	0.999141	0.000859	0.000846	17
18	987076	876	0.999113	0.000887	0.000873	18
19	986200	905	0.999082	0.000918	0.000903	19
20	985295	939	0.999047	0.000953	0.000935	20
21	984356	975	0.999010	0.000990	0.000971	21
22	983381	1015	0.998968	0.001032	0.001011	22
23	982366	1059	0.998922	0.001078	0.001055	23
24	981307	1108	0.998870	0.001130	0.001104	24
25	980199	1163	0.998814	0.001186	0.001157	25
26	979036	1222	0.998752	0.001248	0.001217	26
27	977814	1288	0.998683	0.001317	0.001282	27
28	976526	1361	0.998607	0.001393	0.001355	28
29	975165	1440	0.998523	0.001477	0.001435	29
30	973725	1529	0.998430	0.001570	0.001524	30
31	972196	1627	0.998327	0.001673	0.001621	31
32	970569	1734	0.998213	0.001787	0.001729	32
33	968835	1852	0.998088	0.001912	0.001849	33
34	966983	1983	0.997949	0.002051	0.001981	34
35	965000	2127	0.997796	0.002204	0.002127	35
36	962873	2284	0.997627	0.002373	0.002288	36
37	960589	2459	0.997440	0.002560	0.002466	37
38	958130	2650	0.997234	0.002766	0.002663	38
39	955480	2861	0.997006	0.002994	0.002880	39
40	952619	3092	0.996754	0.003246	0.003121	40
41	949527	3347	0.996476	0.003524	0.003386	41
42	946180	3625	0.996168	0.003832	0.003680	42
43	942555	3932	0.995828	0.004172	0.004004	43

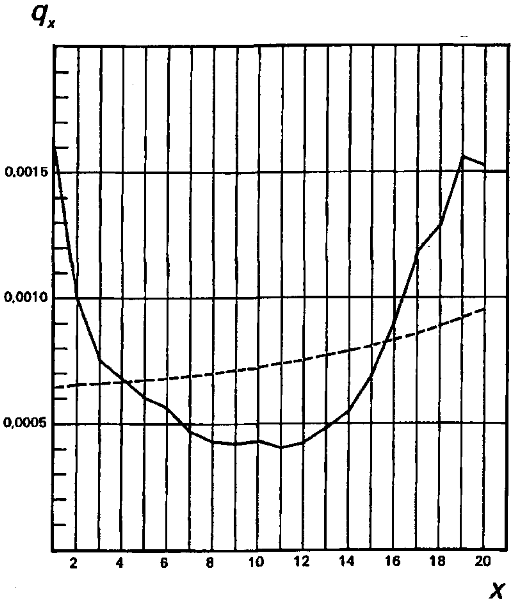
x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
44	938623	4268	0.995453	0.004547	0.004363	44
45	934355	4636	0.995039	0.004961	0.004759	45
46	929719	5039	0.994581	0.005419	0.005196	46
47	924680	5478	0.994075	0.005925	0.005680	47
48	919202	5960	0.993516	0.006484	0.006214	48
49	913242	6484	0.992900	0.007100	0.006805	49
50	906758	7056	0.992218	0.007782	0.007457	50
51	899702	7678	0.991466	0.008534	0.008179	51
52	892024	8354	0.990636	0.009364	0.008976	52
53	883670	9085	0.989719	0.010281	0.009856	53
54	874585	9877	0.988706	0.011294	0.010829	54
55	864708	10733	0.987589	0.012411	0.011905	55
56	853975	11652	0.986355	0.013645	0.013093	56
57	842323	12640	0.984994	0.015006	0.014406	57
58	829683	13696	0.983492	0.016508	0.015857	58
59	815987	14822	0.981835	0.018165	0.017461	59
60	801165	16018	0.980007	0.019993	0.019233	60
61	785147	17280	0.977991	0.022009	0.021191	61
62	767867	18607	0.975768	0.024232	0.023355	62
63	749260	19992	0.973318	0.026682	0.025746	63
64	729268	21428	0.970617	0.029383	0.028388	64
65	707840	22905	0.967641	0.032359	0.031308	65
66	684935	24409	0.964363	0.035637	0.034534	66
67	660526	25923	0.960754	0.039246	0.038100	67
68	634603	27427	0.956781	0.043219	0.042040	68
69	607176	28895	0.952410	0.047590	0.046394	69
70	578281	30300	0.947604	0.052396	0.051205	70
71	547981	31608	0.942320	0.057680	0.056522	71
72	516373	32781	0.936516	0.063484	0.062397	72
73	483592	33782	0.930143	0.069857	0.068889	73
74	449810	34567	0.923152	0.076848	0.076063	74
75	415243	35093	0.915487	0.084513	0.083991	75
76	380150	35320	0.907092	0.092908	0.092752	76
77	344830	35206	0.897903	0.102097	0.102433	77
78	309624	34722	0.887858	0.112142	0.113131	78
79	274902	33843	0.876888	0.123112	0.124953	79
80	241059	32562	0.864924	0.135076	0.138016	80
81	208497	30880	0.851892	0.148108	0.152452	81
82	177617	28823	0.837720	0.162280	0.168404	82
83	148794	26436	0.822333	0.177667	0.186032	83
84	122358	23779	0.805658	0.194342	0.205512	84
85	98579	20936	0.787625	0.212375	0.227038	85
86	77643	18000	0.768166	0.231834	0.250825	86
87	59643	15077	0.747222	0.252778	0.277111	87
88	44566	12267	0.724741	0.275259	0.306159	88
89	32299	9668	0.700685	0.299315	0.338257	89
90	22631	7354	0.675029	0.324971	0.373727	90
91	15277	5381	0.647770	0.352230	0.412924	91
92	9896	3771	0.618925	0.381075	0.456238	92
93	6125	2520	0.588542	0.411458	0.504101	93
94	3605	1598	0.556699	0.443301	0.556993	94
95	2007	956	0.523511	0.476489	0.615441	95
96	1051	537	0.489133	0.510867	0.680028	96
97	514	281	0.453764	0.546236	0.751400	97
98	233	136	0.417646	0.582354	0.830269	98
99	97	60	0.381068	0.618932	0.917424	99
100	37	24	0.344362	0.655638	1.013733	100
101	13	9	0.307899	0.692101	1.120159	101
102	4	3	0.272079	0.727921	1.237766	102
103	1	1	0.237322	0.762678	1.367726	103
104	0	0	0.204055	0.795945	1.511338	104

Les graphiques 1 à 6 illustrent cet ajustement, suivant le découpage ci-dessous :

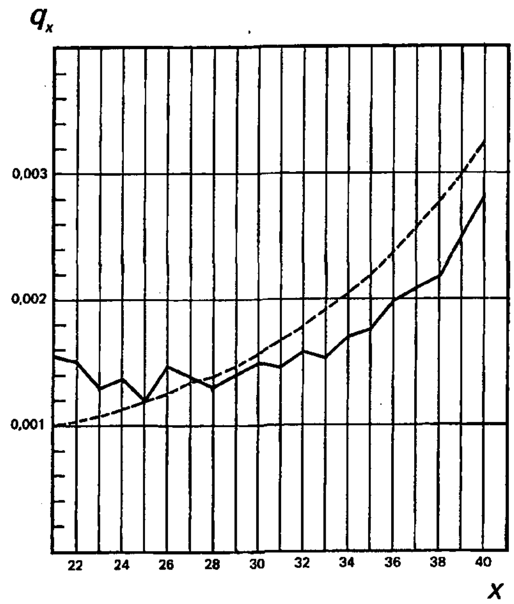
$1 \leqslant x \leqslant 20$	graphique 1
$21 \leqslant x \leqslant 40$	graphique 2
$40 \leqslant x \leqslant 60$	graphique 3
$60 \leqslant x \leqslant 80$	graphique 4
$80 \leqslant x \leqslant 100$	graphique 5
$0 \leqslant x \leqslant 99$	graphique 6 (canevas semi-logarithmique).

Chaque graphique comporte deux courbes :
- celle en trait continu donne la probabilité de décès brute à l'âge x.
- celle en trait pointillé donne la probabilité de décès ajustée à l'âge x.

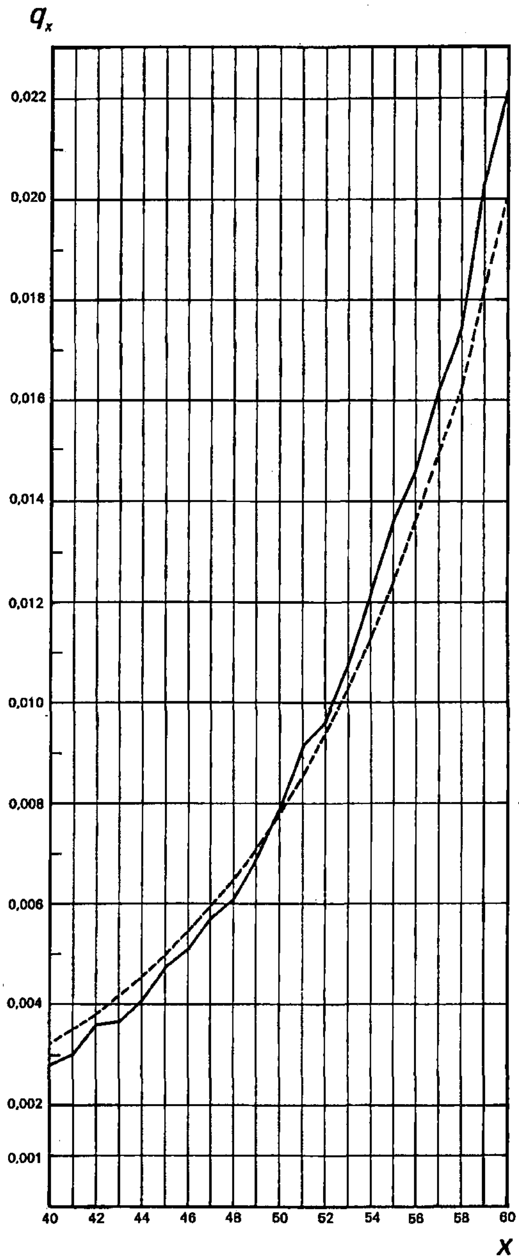
GRAPHIQUE 1.
HS



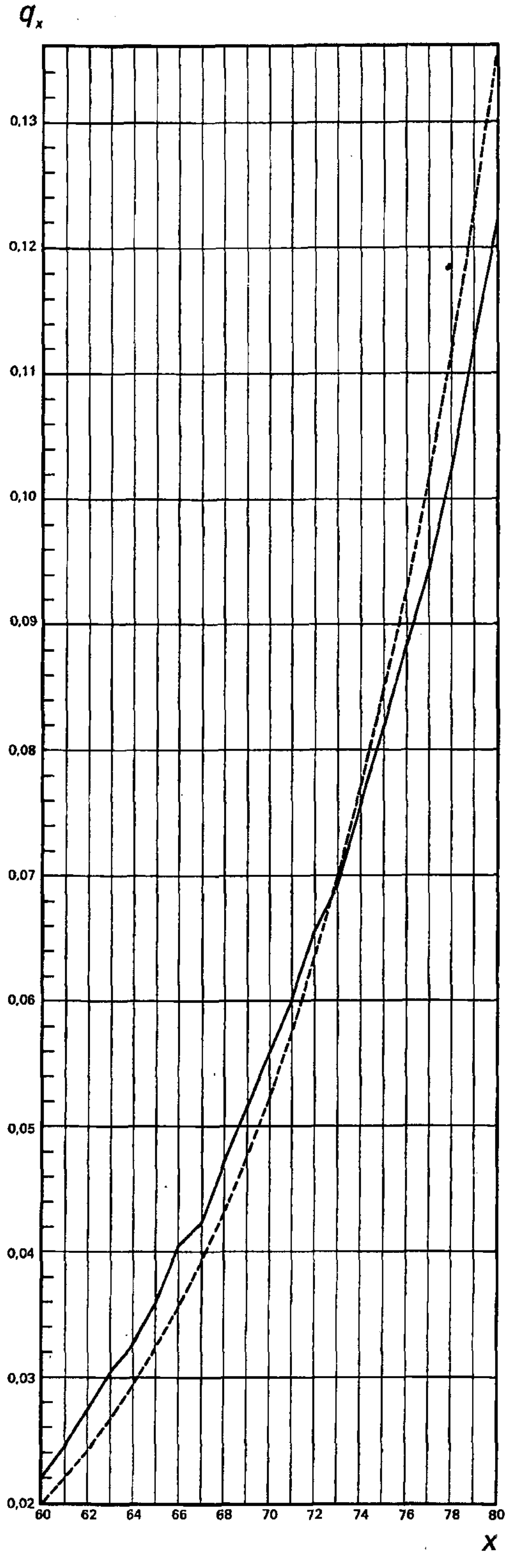
GRAPHIQUE 2.
HS



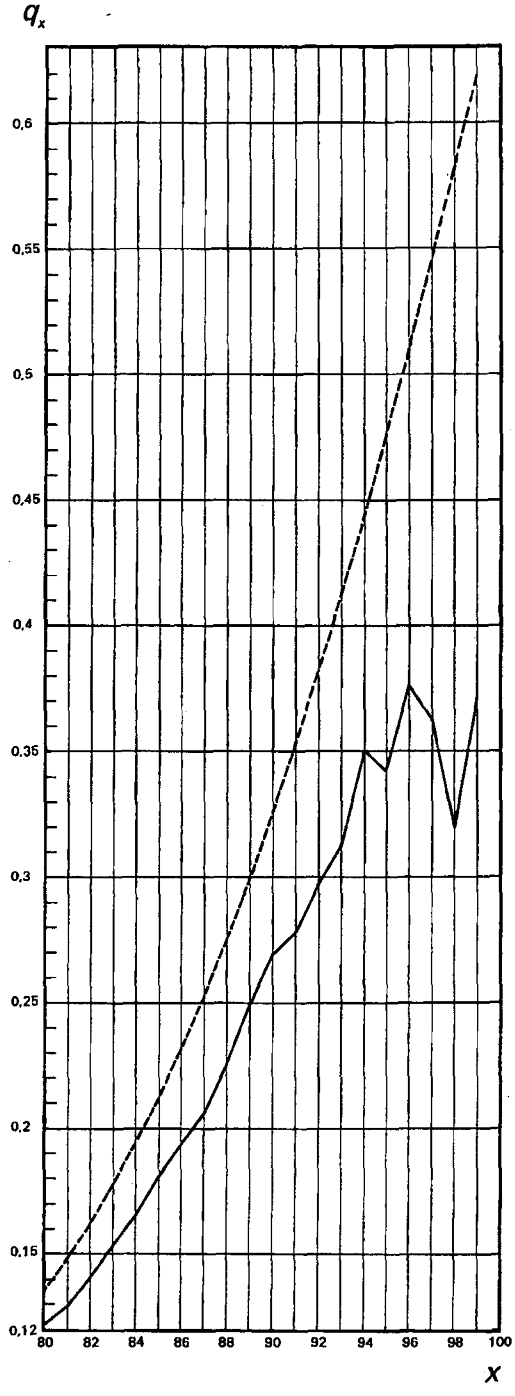
GRAPHIQUE 3.
HS



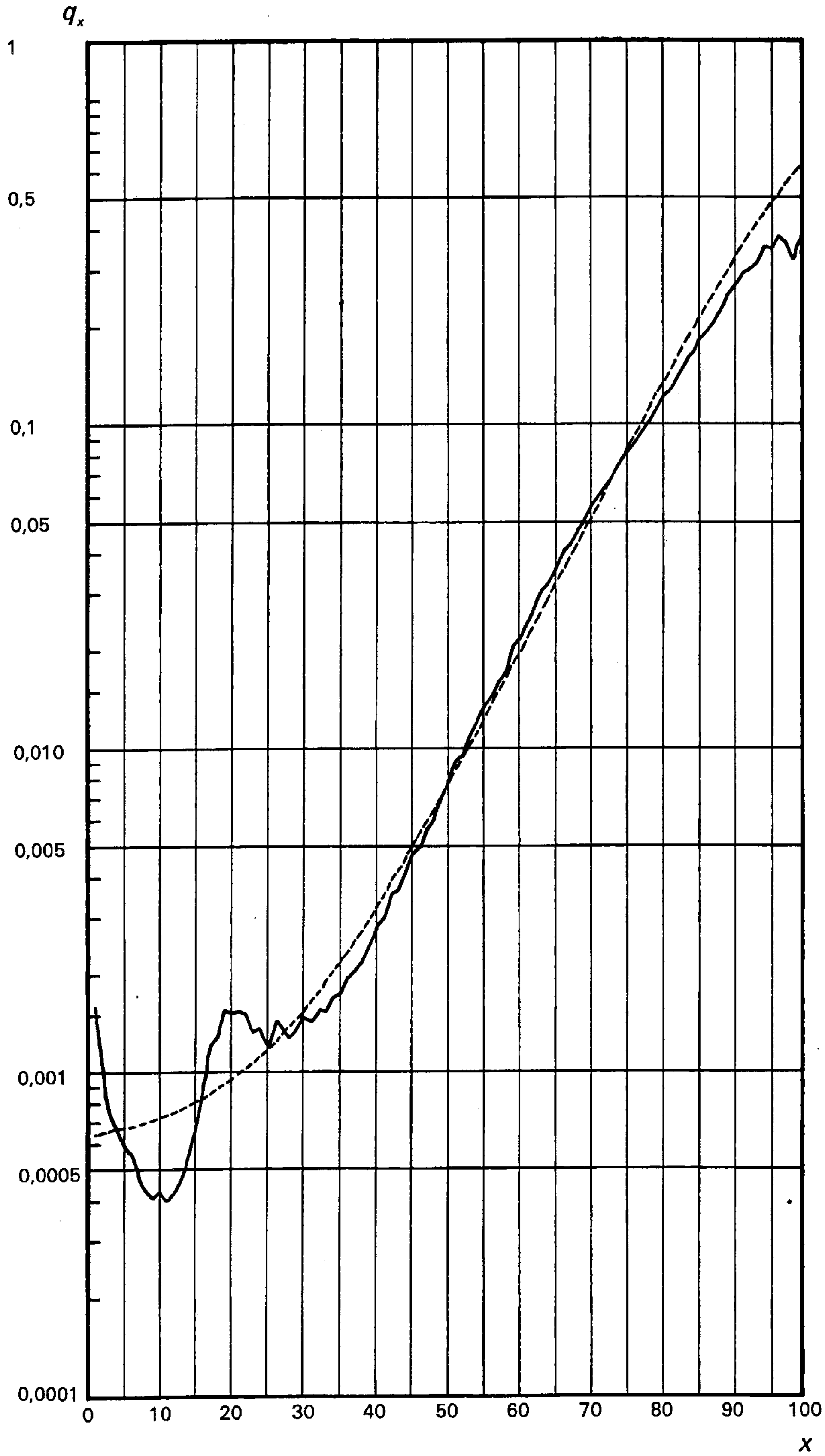
GRAPHIQUE 4.
HS



GRAPHIQUE 5.
HS



GRAPHIQUE 6.
HS



c. *La table ajustée* HD (1968-1972).

La table ajustée HD (1968-1972) se compose de deux parties :

HD1 : $0 \leqslant x \leqslant 69$; HD2 : $x \geqslant 70$.

i — Calcul de HD1 : ($0 \leqslant x \leqslant 69$).

L'ajustement HD1 se calcule en quatre phases successives.

α — On recherche le minimum de

$$S = \sum_{x=15}^{x=66} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)} \right]^2$$

où s est fixé à la valeur $s \equiv s_1 = 0.999\ 585$.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit aux valeurs g et c suivantes :

$$g \equiv g_1 = 0.999 \quad 649 \quad 454 \quad 078$$

$$c \equiv c_1 = 1.111 \quad 199 \quad 547 \quad 061.$$

β — On recherche le minimum de

$$S = \sum_{x=15}^{x=33} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)} \right]^2$$

où g et c sont fixés respectivement aux valeurs g_1 et c_1.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit à la valeur :

$$s \equiv s_2 = 0.999 \quad 222 \quad 173 \quad 465$$

γ — On recherche le minimum de

$$S = \sum_{x=33}^{x=66} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)} \right]^2$$

où s est fixé à sa valeur s_2.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit aux valeurs g et c suivantes :

$$g \equiv g_2 = 0.999 \quad 731 \quad 696 \quad 667$$

$$c \equiv c_2 = 1.115 \quad 094 \quad 352 \quad 734.$$

δ — On recherche le minimum de

$$S = \sum_{x=15}^{x=33} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)} \right]^2$$

où g et c sont fixés respectivement aux valeurs g_2 et c_2.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit à la valeur :

$$s \equiv s_3 = 0.999 \quad 147 \quad 835 \quad 528.$$

L'ajustement HD1 ou première partie de la table ajustée HD (1968-1972) : $0 \leqslant x \leqslant 69$, est alors complètement défini par les valeurs :

$$s^* \equiv s_3 = 0.999 \quad 147 \quad 835 \quad 528$$

$$g^* \equiv g_2 = 0.999 \quad 731 \quad 696 \quad 667$$

$$c^* \equiv c_2 = 1.115 \quad 094 \quad 352 \quad 734$$

ii — Calcul de HD2 ($x \geqslant 70$).

L'ajustement de la partie HD2 a été conduit dans les hypothèses suivantes :

$$s^*(\text{HD2}) = s^*(\text{HD1}) = 0.999 \quad 147 \quad 835 \quad 528$$

$$\mu_{70}(\text{HD2}) = \mu_{70}(\text{HD1})$$

$$l_{70}(\text{HD2}) \equiv l_{70}(\text{HD1})$$

La dernière condition qui impose le raccord des deux parties HD1 et HD2 par le nombre de survivants à l'âge 70, n'a aucune influence sur l'ajustement. Sa seule conséquence sera de fixer le calcul de l_x ($x \geqslant 70$) par la formule suivante :

$$l_{x \geqslant 70} = l_{70} s^{x-70} g^{(c^x - c^{70})}$$

La deuxième condition entraîne :

$$-\ln s^* - c^{70} \ln c(\ln g) = -\ln s^* - c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)$$

où c et g représentent les constantes de MAKEHAM restant à déterminer pour la partie HD2.

On a successivement :

$$c^{70}(\ln c)\ln g = c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)$$

$$\ln g = \frac{c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)}{c^{70} \ln c}$$

$$g = \exp \frac{c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)}{c^{70} \ln c}.$$

On recherche le minimum de :

$$S = \sum_{x=67}^{x=85} \left[p_x - s^* g^{c^x(c-1)} \right]^2$$

$$S = \sum_{x=67}^{x=85} \left[p_x - s^* e^{\frac{c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)}{c^{70} \ln c} \cdot c^x(c-1)} \right]^2$$

$$S = \sum_{x=67}^{x=85} \left[p_x - s^* e^{\frac{c^{*70} \ln c^*(\ln g^*)}{\ln c} \cdot c^{x-70}(c-1)} \right]^2$$

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit à la valeur :

$$c = 1.077 \quad 130 \quad 677 \quad 635 \quad .$$

On détermine alors la constante g par la relation :

$$g = \exp \frac{c^{*70} \ln c^{*} (\ln g^{*})}{c^{70} \ln c}.$$

On obtient :

$$g = 0.995 \quad 564 \quad 574 \quad 228 \quad .$$

L'ajustement HD2 ou seconde partie de la table ajustée HD(1968-1972) : $x \geqslant 70$, est alors complètement défini par les valeurs :

$$s^* = 0.999 \quad 147 \quad 835 \quad 528$$

$$g^* = 0.995 \quad 564 \quad 574 \quad 228$$

$$c^* = 1.077 \quad 130 \quad 677 \quad 635.$$

Le tableau II donne la table HD(1968-1972). Ce tableau comporte sept colonnes donnant respectivement :

x : âge.

l_x : nombre de survivants à l'âge x ($l_0 = 10^6$).

d_x : nombre de décès à l'âge x.

p_x : probabilité de survie à l'âge x.

q_x : probabilité de décès à l'âge x.

μ_x : taux instantané de mortalité à l'âge x.

x : âge.

Les graphiques 7 à 14 illustrent cet ajustement, suivant le découpage ci-dessous :

$1 \leqslant x \leqslant 20$	graphique 7	
$20 \leqslant x \leqslant 40$	graphique 8	
$40 \leqslant x \leqslant 60$	graphique 9	
$60 \leqslant x \leqslant 70$	graphique 10	
$70 \leqslant x \leqslant 80$	graphique 11	
$80 \leqslant x \leqslant 100$	graphique 12	
$0 \leqslant x \leqslant 70$	graphique 13	(canevas
$0 \leqslant x \leqslant 99$	graphique 14	semi-logarithmique)

Chaque graphique comporte deux courbes :
- celle en trait plein donne la probabilité de décès brute à l'âge x.
- celle en trait pointillé donne la probabilité de décès ajustée à l'âge x.

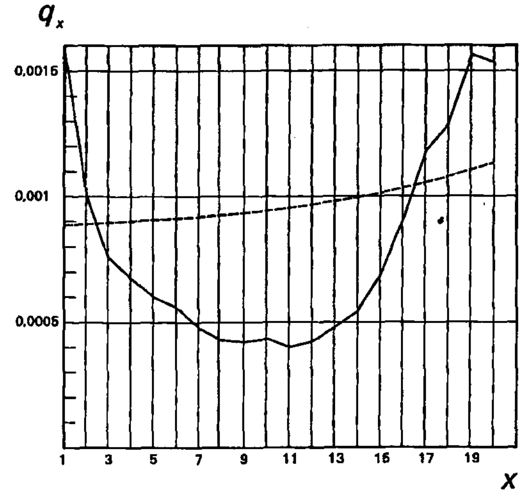
Tableau II.

Table ajustée HD (1968-1972).

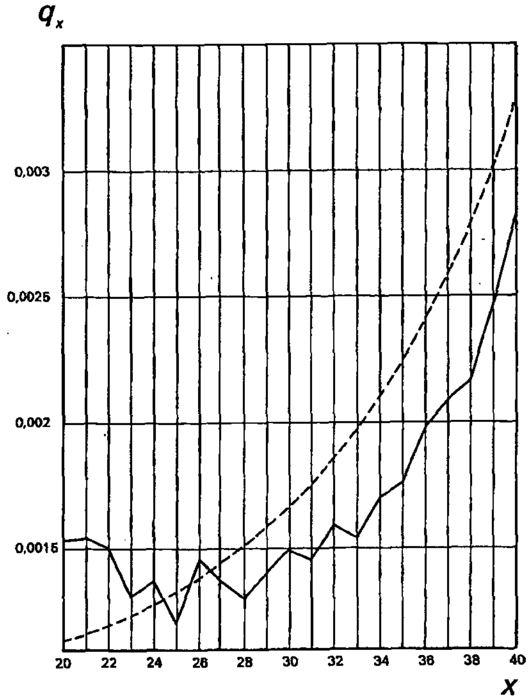
x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
0	1000000	883	0.999117	0.000883	0.000882	0
1	999117	886	0.999113	0.000887	0.000885	1
2	998231	889	0.999109	0.000891	0.000889	2
3	997342	892	0.999105	0.000895	0.000893	3
4	996450	897	0.999100	0.000900	0.000898	4
5	995553	901	0.999095	0.000905	0.000903	5
6	994652	907	0.999089	0.000911	0.000909	6
7	993745	913	0.999082	0.000918	0.000915	7
8	992832	919	0.999074	0.000926	0.000922	8
9	991913	927	0.999066	0.000934	0.000930	9
10	990986	935	0.999056	0.000944	0.000939	10
11	990051	945	0.999046	0.000954	0.000949	11
12	989106	956	0.999034	0.000966	0.000961	12
13	988150	967	0.999021	0.000979	0.000973	13
14	987183	982	0.999006	0.000994	0.000987	14
15	986201	996	0.998990	0.001010	0.001002	15
16	985205	1013	0.998972	0.001028	0.001020	16
17	984192	1032	0.998951	0.001049	0.001039	17
18	983160	1054	0.998929	0.001071	0.001060	18
19	982106	1077	0.998903	0.001097	0.001084	19
20	981029	1103	0.998875	0.001125	0.001111	20
21	979926	1133	0.998844	0.001156	0.001141	21
22	978793	1166	0.998809	0.001191	0.001174	22
23	977627	1203	0.998770	0.001230	0.001211	23
24	976424	1243	0.998726	0.001274	0.001252	24
25	975181	1290	0.998678	0.001322	0.001298	25
26	973891	1340	0.998624	0.001376	0.001349	26
27	972551	1397	0.998564	0.001436	0.001406	27
28	971154	1460	0.998496	0.001504	0.001470	28
29	969694	1531	0.998421	0.001579	0.001541	29
30	968163	1609	0.998338	0.001662	0.001620	30
31	966554	1697	0.998245	0.001755	0.001709	31
32	964857	1794	0.998141	0.001859	0.001807	32
33	963063	1903	0.998025	0.001975	0.001917	33
34	961160	2022	0.997896	0.002104	0.002040	34
35	959138	2157	0.997752	0.002248	0.002176	35
36	956981	2305	0.997591	0.002409	0.002329	36
37	954676	2471	0.997412	0.002588	0.002498	37
38	952205	2654	0.997212	0.002788	0.002688	38
39	949551	2859	0.996990	0.003010	0.002899	39
40	946692	3084	0.996742	0.003258	0.003135	40
41	943608	3336	0.996465	0.003535	0.003397	41
42	940272	3613	0.996157	0.003843	0.003690	42
43	936659	3922	0.995813	0.004187	0.004017	43
44	932737	4262	0.995430	0.004570	0.004381	44
45	928475	4640	0.995003	0.004997	0.004787	45
46	923835	5056	0.994527	0.005473	0.005240	46
47	918779	5515	0.993997	0.006003	0.005745	47
48	913264	6022	0.993406	0.006594	0.006308	48
49	907242	6581	0.992747	0.007253	0.006936	49
50	900661	7193	0.992013	0.007987	0.007636	50
51	893468	7868	0.991195	0.008805	0.008417	51
52	885600	8604	0.990284	0.009716	0.009287	52
53	876996	9412	0.989268	0.010732	0.010258	53
54	867584	10291	0.988138	0.011862	0.011341	54
55	857293	11249	0.986878	0.013122	0.012548	55

x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
56	846044	12288	0.985476	0.014524	0.013894	56
57	833756	13412	0.983914	0.016086	0.015395	57
58	820344	14622	0.982176	0.017824	0.017068	58
59	805722	15920	0.980241	0.019759	0.018935	59
60	789802	17306	0.978088	0.021912	0.021016	60
61	772496	18776	0.975693	0.024307	0.023337	61
62	753720	20329	0.973029	0.026971	0.025924	62
63	733391	21952	0.970067	0.029933	0.028810	63
64	711439	23638	0.966775	0.033225	0.032028	64
65	687801	25368	0.963117	0.036883	0.035616	65
66	662433	27123	0.959055	0.040945	0.039617	66
67	635310	28879	0.954544	0.045456	0.044079	67
68	606431	30600	0.949540	0.050460	0.049054	68
69	575831	32252	0.943991	0.056009	0.054601	69
70	543579	33225	0.938877	0.061123	0.060788	70
71	510354	33488	0.934384	0.065617	0.065410	71
72	476866	33588	0.929565	0.070435	0.070390	72
73	443278	33510	0.924404	0.075596	0.075753	73
74	409768	33241	0.918877	0.081123	0.081530	74
75	376527	32773	0.912960	0.087040	0.087753	75
76	343754	32097	0.906630	0.093370	0.094456	76
77	311657	31209	0.899860	0.100140	0.101676	77
78	280448	30113	0.892625	0.107375	0.109452	78
79	250335	28814	0.884897	0.115103	0.117828	79
80	221521	27325	0.876648	0.123352	0.126851	80
81	194196	25664	0.867848	0.132152	0.136569	81
82	168532	23852	0.858469	0.141531	0.147037	82
83	144680	21922	0.848479	0.151521	0.158312	83
84	122758	19905	0.837849	0.162151	0.170457	84
85	102853	17840	0.826548	0.173452	0.183539	85
86	85013	15766	0.814546	0.185454	0.197630	86
87	69247	13724	0.801813	0.198187	0.212808	87
88	55523	11753	0.788320	0.211680	0.229156	88
89	43770	9890	0.774040	0.225960	0.246765	89
90	33880	8167	0.758949	0.241051	0.265732	90
91	25713	6608	0.743022	0.256978	0.286163	91
92	19105	5230	0.726241	0.273759	0.308169	92
93	13875	4043	0.708589	0.291411	0.331872	93
94	9832	3048	0.690055	0.309945	0.357404	94
95	6784	2234	0.670633	0.329367	0.384905	95
96	4550	1591	0.650325	0.349675	0.414527	96
97	2959	1097	0.629137	0.370863	0.446435	97
98	1862	732	0.607087	0.392913	0.480803	98
99	1130	470	0.584200	0.415800	0.517821	99
100	660	290	0.560512	0.439488	0.557696	100
101	370	172	0.536070	0.463930	0.600645	101
102	198	97	0.510934	0.489066	0.646908	102
103	101	52	0.485176	0.514824	0.696738	103
104	49	26	0.458882	0.541118	0.750413	104
105	23	13	0.432152	0.567848	0.808227	105
106	10	6	0.405099	0.594901	0.870500	106
107	4	3	0.377851	0.622149	0.937576	107
108	1	0	0.350549	0.649451	1.009827	108
109	1	1	0.323343	0.676657	1.087649	109
110	0	0	0.296395	0.703605	1.171475	110

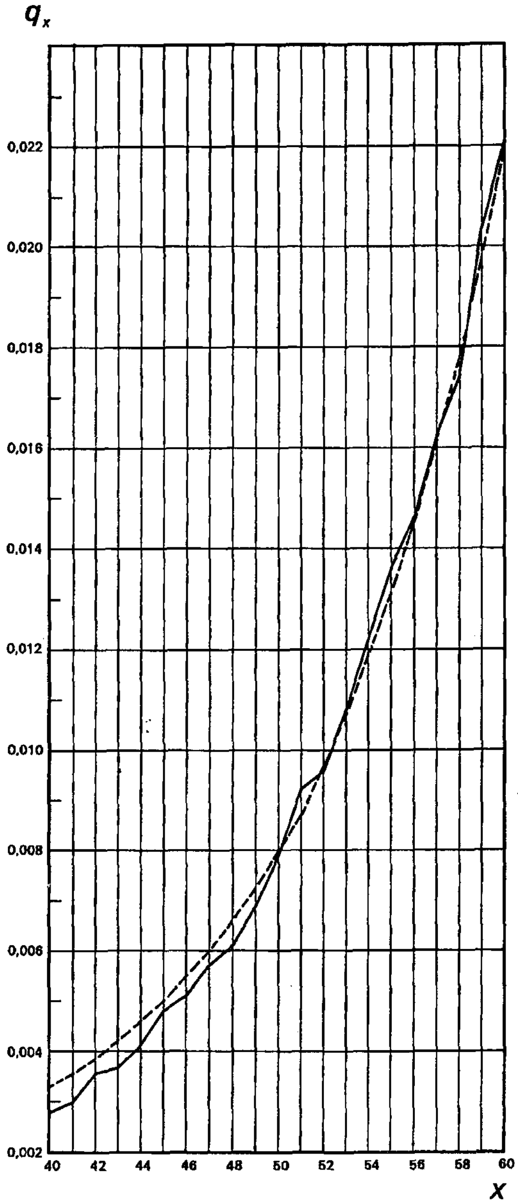
GRAPHIQUE 7.
HD

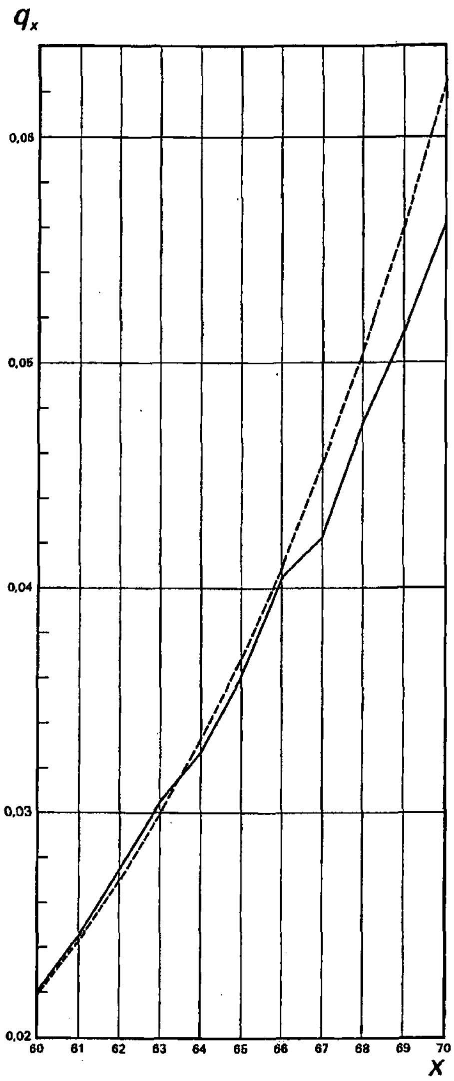


GRAPHIQUE 8.
HD



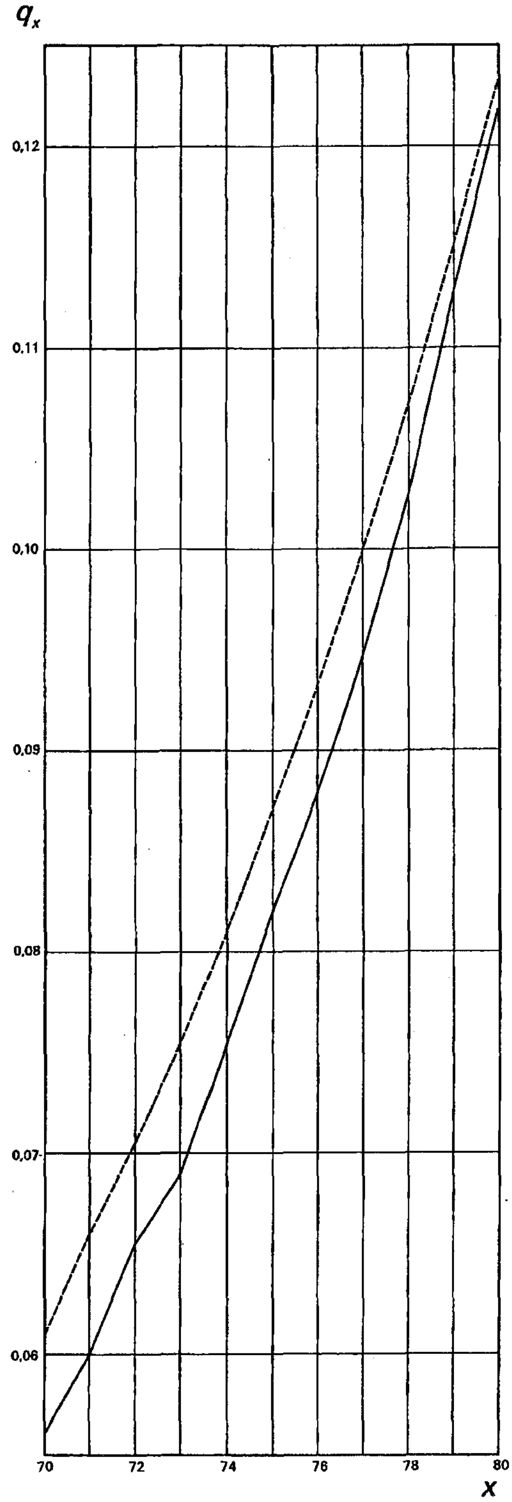
GRAPHIQUE 9.
HD

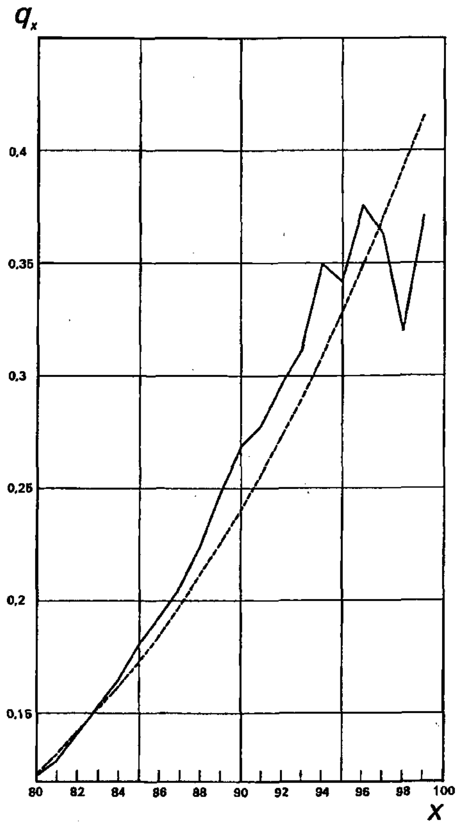




GRAPHIQUE 10.
HD

GRAPHIQUE 11.
HD

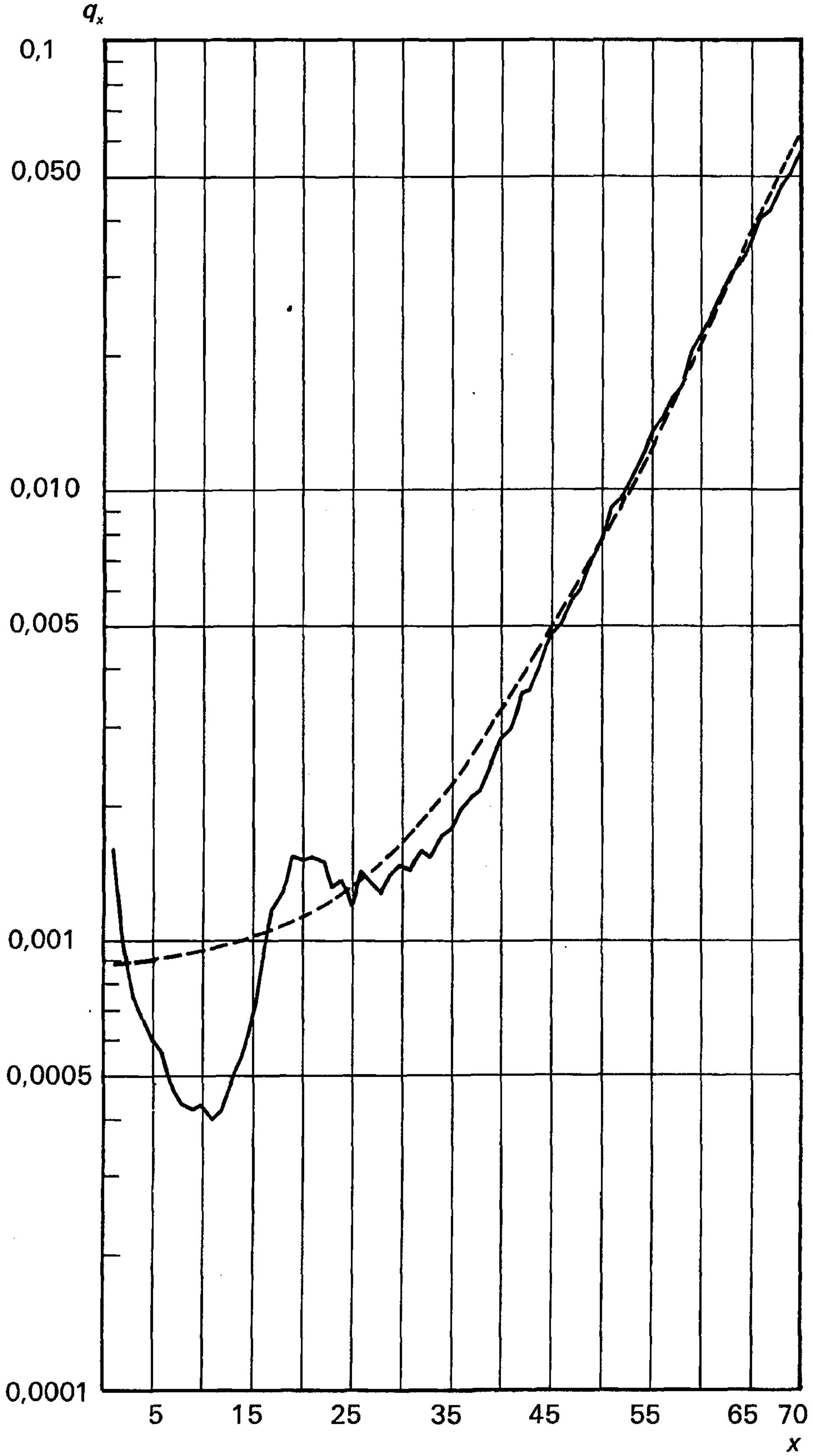




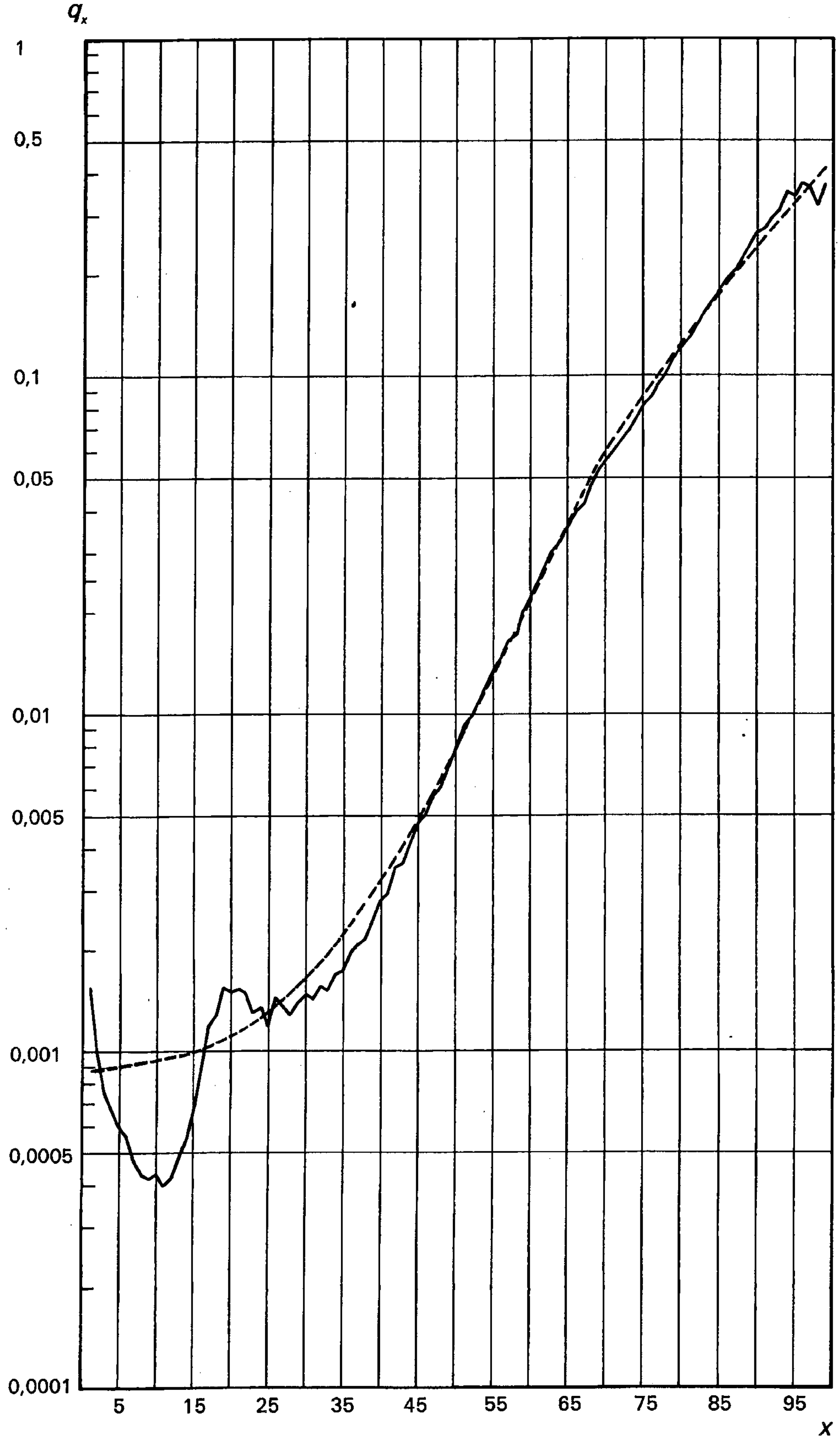
GRAPHIQUE 12.
HD

GRAPHIQUE 13.

HD



GRAPHIQUE 14.
HD



d. *La table ajustée* HFR (1968-1972).

α — On recherche le minimum de

$$S = \sum_{x=15}^{x=70} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)} \right]^2 .$$

A partir des valeurs initiales

$$s_0 = 0.999 \quad 544$$
$$g_0 = 0.999 \quad 503$$
$$c_0 = 1.097 \quad 100,$$

la méthode de NEWTON-RAPHSON conduit aux valeurs suivantes :

$$s \equiv s_1 = 0.999 \quad 931 \quad 758 \quad 905$$
$$g \equiv g_1 = 0.999 \quad 230 \quad 057 \quad 766$$
$$c \equiv c_1 = 1.093 \quad 532 \quad 314 \quad 287$$

β — On recherche le minimum de

$$S = \sum_{x=15}^{x=35} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)} \right]^2 ,$$

où g et c sont fixés respectivement aux valeurs g_1 et c_1.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit à la valeur :

$$s \equiv s_2 = 0.999 \quad 748 \quad 689 \quad 260.$$

γ — On recherche le minimum de

$$S = \sum_{x=15}^{x=70} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)} \right]^2 ,$$

où s est fixé à la valeur s_2.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit aux valeurs :

$$g \equiv g_2 = 0.999 \quad 321 \quad 517 \quad 086$$
$$c \equiv c_2 = 1.095 \quad 209 \quad 173 \quad 124.$$

δ — On recherche le minimum de

$$S = \sum_{x=15}^{x=30} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)} \right]^2 ,$$

où g et c sont fixés respectivement aux valeurs g_2 et c_2.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit à la valeur :

$$s \equiv s_3 = 0.999 \quad 587 \quad 967 \quad 271.$$

ε — On recherche le minimum de

$$S = \sum_{x=15}^{x=70} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)} \right]^2 ,$$

où s est fixé à la valeur s_3.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit aux valeurs :

$$g \equiv g_3 = 0.999 \quad 393 \quad 260 \quad 503$$
$$c \equiv c_3 = 1.096 \quad 695 \quad 528 \quad 941.$$

ζ — On recherche le minimum de

$$S = \sum_{x=15}^{x=90} \left[p_x - sg^{c^x(c-1)} \right]^2 ,$$

où s et g sont fixés respectivement aux valeurs s_3 et g_3.

La méthode de NEWTON-RAPHSON conduit à la valeur :

$$c \equiv c_4 = 1.094 \quad 846 \quad 272 \quad 306.$$

L'ajustement HFR (1968-1972) est alors complètement défini par les valeurs :

$$s^* \equiv s_3 = 0.999 \quad 587 \quad 967 \quad 271$$
$$g^* \equiv g_3 = 0.999 \quad 393 \quad 260 \quad 503$$
$$c^* \equiv c_4 = 1.094 \quad 846 \quad 272 \quad 306.$$

Le tableau III donne la table HFR (1968-1972). Ce tableau comporte sept colonnes donnant respectivement :

x : âge.

l_x : nombre de survivants à l'âge x ($l_0 = 10^6$).

d_x : nombre de décès à l'âge x.

p_x : probabilité de survie à l'âge x.

q_x : probabilité de décès à l'âge x.

μ_x : taux instantané de mortalité à l'âge x.

x : âge.

Les graphiques 15 à 20 illustrent cet ajustement, suivant le découpage ci-dessous :

$1 \leqslant x \leqslant 20$	graphique 15
$20 \leqslant x \leqslant 40$	graphique 16
$40 \leqslant x \leqslant 60$	graphique 17
$60 \leqslant x \leqslant 80$	graphique 18
$80 \leqslant x \leqslant 100$	graphique 19
$0 \leqslant x \leqslant 100$	graphique 20 (canevas semi-logarithmique).

Chaque graphique comporte deux courbes :
- celle en trait continu donne la probabilité de décès brute à l'âge x.
- celle en trait pointillé donne la probabilité de décès ajustée à l'âge x.

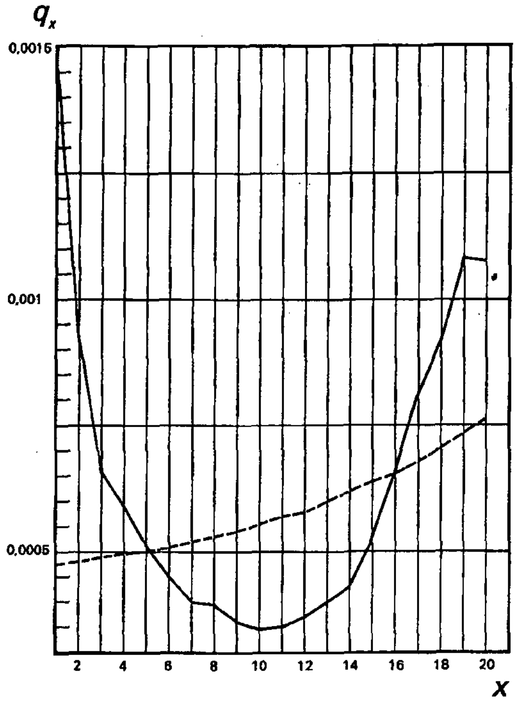
Tableau III.

Table ajustée HFR (1968-1972).

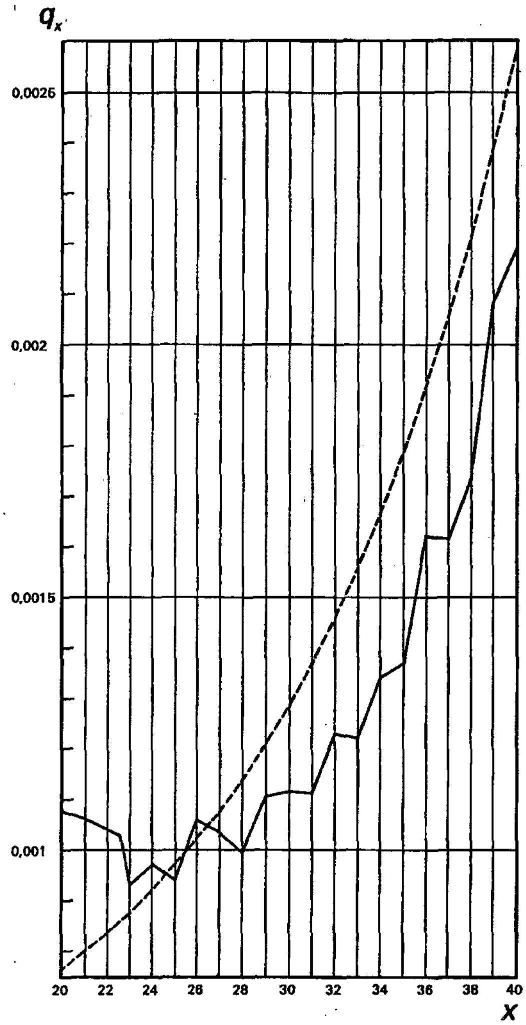
x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
0	1000000	470	0.999530	0.000470	0.000467	0
1	999530	474	0.999525	0.000475	0.000472	1
2	999056	481	0.999519	0.000481	0.000478	2
3	998575	487	0.999512	0.000488	0.000484	3
4	998088	494	0.999505	0.000495	0.000491	4
5	997594	501	0.999497	0.000503	0.000499	5
6	997093	510	0.999489	0.000511	0.000507	6
7	996583	518	0.999479	0.000521	0.000516	7
8	996065	529	0.999469	0.000531	0.000526	8
9	995536	540	0.999458	0.000542	0.000536	9
10	994996	551	0.999446	0.000554	0.000548	10
11	994445	565	0.999432	0.000568	0.000561	11
12	993880	579	0.999417	0.000583	0.000575	12
13	993301	595	0.999401	0.000599	0.000591	13
14	992706	612	0.999383	0.000617	0.000608	14
15	992094	631	0.999364	0.000636	0.000626	15
16	991463	652	0.999343	0.000657	0.000647	16
17	990811	674	0.999319	0.000681	0.000669	17
18	990137	699	0.999294	0.000706	0.000693	18
19	989438	726	0.999266	0.000734	0.000720	19
20	988712	756	0.999236	0.000764	0.000749	20
21	987956	788	0.999202	0.000798	0.000781	21
22	987168	824	0.999166	0.000834	0.000816	22
23	986344	862	0.999126	0.000874	0.000854	23
24	985482	905	0.999082	0.000918	0.000896	24
25	984577	952	0.999034	0.000966	0.000942	25
26	983625	1002	0.998981	0.001019	0.000992	26
27	982623	1057	0.998924	0.001076	0.001047	27
28	981566	1119	0.998861	0.001139	0.001107	28
29	980447	1184	0.998792	0.001208	0.001173	29
30	979263	1257	0.998716	0.001284	0.001246	30
31	978006	1337	0.998634	0.001366	0.001325	31
32	976669	1423	0.998543	0.001457	0.001411	32
33	975246	1517	0.998444	0.001556	0.001506	33
34	973729	1621	0.998336	0.001664	0.001610	34
35	972108	1733	0.998217	0.001783	0.001723	35
36	970375	1856	0.998087	0.001913	0.001848	36
37	968519	1991	0.997945	0.002055	0.001984	37
38	966528	2137	0.997789	0.002211	0.002133	38
39	964391	2296	0.997619	0.002381	0.002296	39
40	962095	2471	0.997432	0.002568	0.002475	40
41	959624	2660	0.997228	0.002772	0.002671	41
42	956964	2867	0.997004	0.002996	0.002885	42
43	954097	3092	0.996760	0.003240	0.003119	43
44	951005	3336	0.996492	0.003508	0.003376	44
45	947669	3603	0.996199	0.003801	0.003657	45
46	944066	3891	0.995878	0.004122	0.003965	46
47	940175	4206	0.995526	0.004474	0.004302	47
48	935969	4547	0.995142	0.004858	0.004671	48
49	931422	4917	0.994721	0.005279	0.005075	49
50	926505	5317	0.994261	0.005739	0.005517	50
51	921188	5751	0.993757	0.006243	0.006001	51
52	915437	6219	0.993206	0.006794	0.006531	52
53	909218	6726	0.992603	0.007397	0.007112	53
54	902492	7271	0.991943	0.008057	0.007747	54
55	895221	7859	0.991221	0.008779	0.008443	55

x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	x
56	887362	8491	0.990431	0.009569	0.009204	56
57	878871	9170	0.989567	0.010433	0.010038	57
58	869701	9896	0.988622	0.011378	0.010951	58
59	859805	10672	0.987588	0.012412	0.011951	59
60	849133	11500	0.986457	0.013543	0.013045	60
61	837633	12379	0.985221	0.014779	0.014244	61
62	825254	13313	0.983869	0.016131	0.015556	62
63	811941	14298	0.982391	0.017609	0.016992	63
64	797643	15334	0.980775	0.019225	0.018564	64
65	782309	16422	0.979009	0.020991	0.020286	65
66	765887	17554	0.977079	0.022921	0.022171	66
67	748333	18730	0.974971	0.025029	0.024235	67
68	729603	19942	0.972668	0.027332	0.026494	68
69	709661	21181	0.970153	0.029847	0.028968	69
70	688480	22440	0.967406	0.032594	0.031676	70
71	666040	23706	0.964408	0.035592	0.034642	71
72	642334	24963	0.961137	0.038863	0.037888	72
73	617371	26197	0.957567	0.042433	0.041443	73
74	591174	27386	0.953675	0.046325	0.045334	74
75	563788	28510	0.949431	0.050569	0.049595	75
76	535278	29544	0.944807	0.055193	0.054260	76
77	505734	30461	0.939769	0.060231	0.059367	77
78	475273	31232	0.934285	0.065715	0.064959	78
79	444041	31830	0.928317	0.071683	0.071081	79
80	412211	32224	0.921827	0.078173	0.077784	80
81	379987	32385	0.914774	0.085226	0.085122	81
82	347602	32287	0.907113	0.092887	0.093156	82
83	315315	31910	0.898799	0.101201	0.101953	83
84	283405	31236	0.889784	0.110216	0.111584	84
85	252169	30256	0.880018	0.119982	0.122128	85
86	221913	28971	0.869448	0.130552	0.133672	86
87	192942	27393	0.858022	0.141978	0.146311	87
88	165549	25547	0.845684	0.154316	0.160149	88
89	140002	23468	0.832378	0.167622	0.175300	89
90	116534	21203	0.818051	0.181949	0.191887	90
91	95331	18814	0.802648	0.197352	0.210048	91
92	76517	16366	0.786116	0.213884	0.229931	92
93	60151	13930	0.768406	0.231594	0.251700	93
94	46221	11580	0.749474	0.250526	0.275534	94
95	34641	9378	0.729280	0.270720	0.301628	95
96	25263	7382	0.707795	0.292205	0.330197	96
97	17881	5632	0.684997	0.315003	0.361476	97
98	12249	4154	0.660878	0.339122	0.395722	98
99	8095	2951	0.635445	0.364555	0.433215	99
100	5144	2013	0.608720	0.391280	0.474265	100
101	3131	1313	0.580747	0.419253	0.519208	101
102	1818	815	0.551594	0.448406	0.568414	102
103	1003	480	0.521350	0.478650	0.622287	103
104	523	267	0.490137	0.509863	0.681270	104
105	256	139	0.458102	0.541898	0.745846	105
106	117	67	0.425425	0.574575	0.816548	106
107	50	30	0.392315	0.607685	0.893955	107
108	20	13	0.359013	0.640987	0.978705	108
109	7	5	0.325785	0.674215	1.071492	109
110	2	1	0.292921	0.707079	1.173080	110
111	1	1	0.260730	0.739270	1.284303	111
112	0	0	0.229528	0.770472	1.406074	112

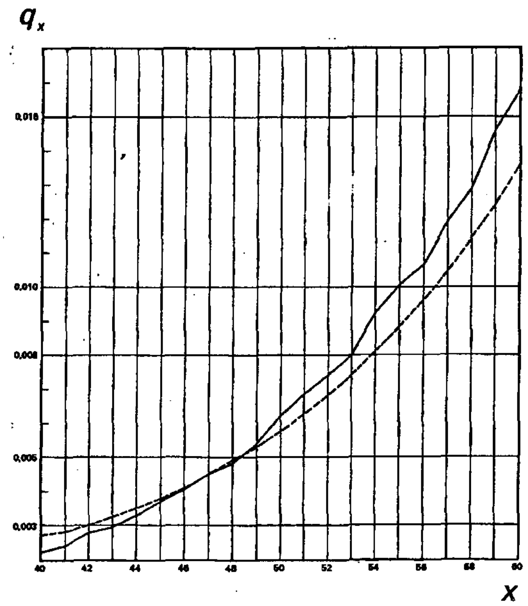
GRAPHIQUE 15.
HFR



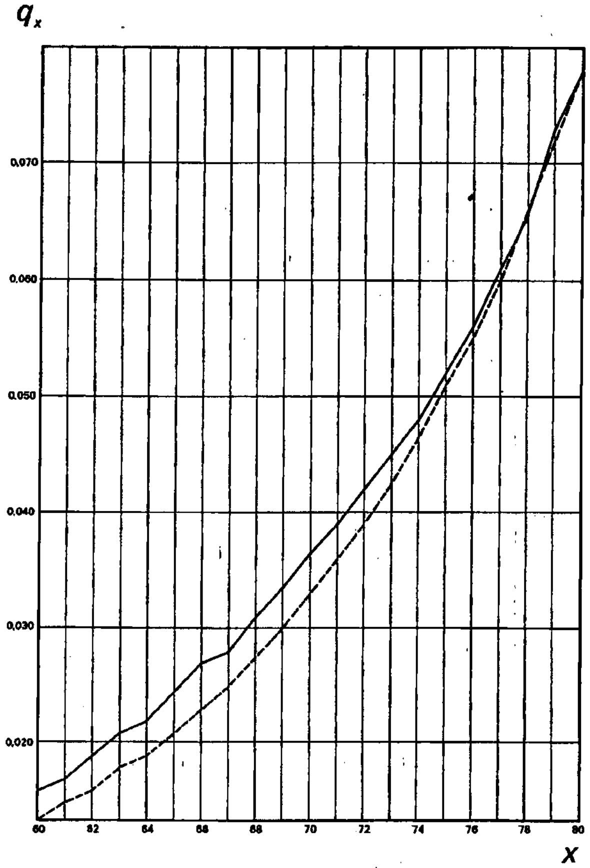
GRAPHIQUE 16.
HFR



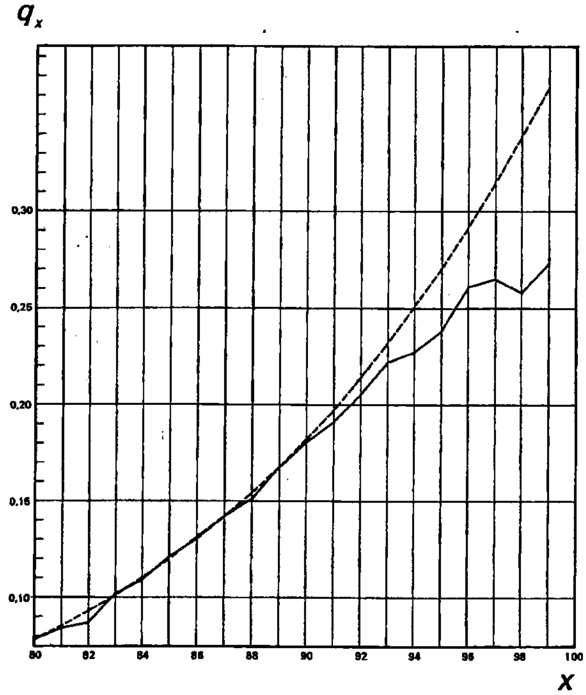
GRAPHIQUE 17.
HFR



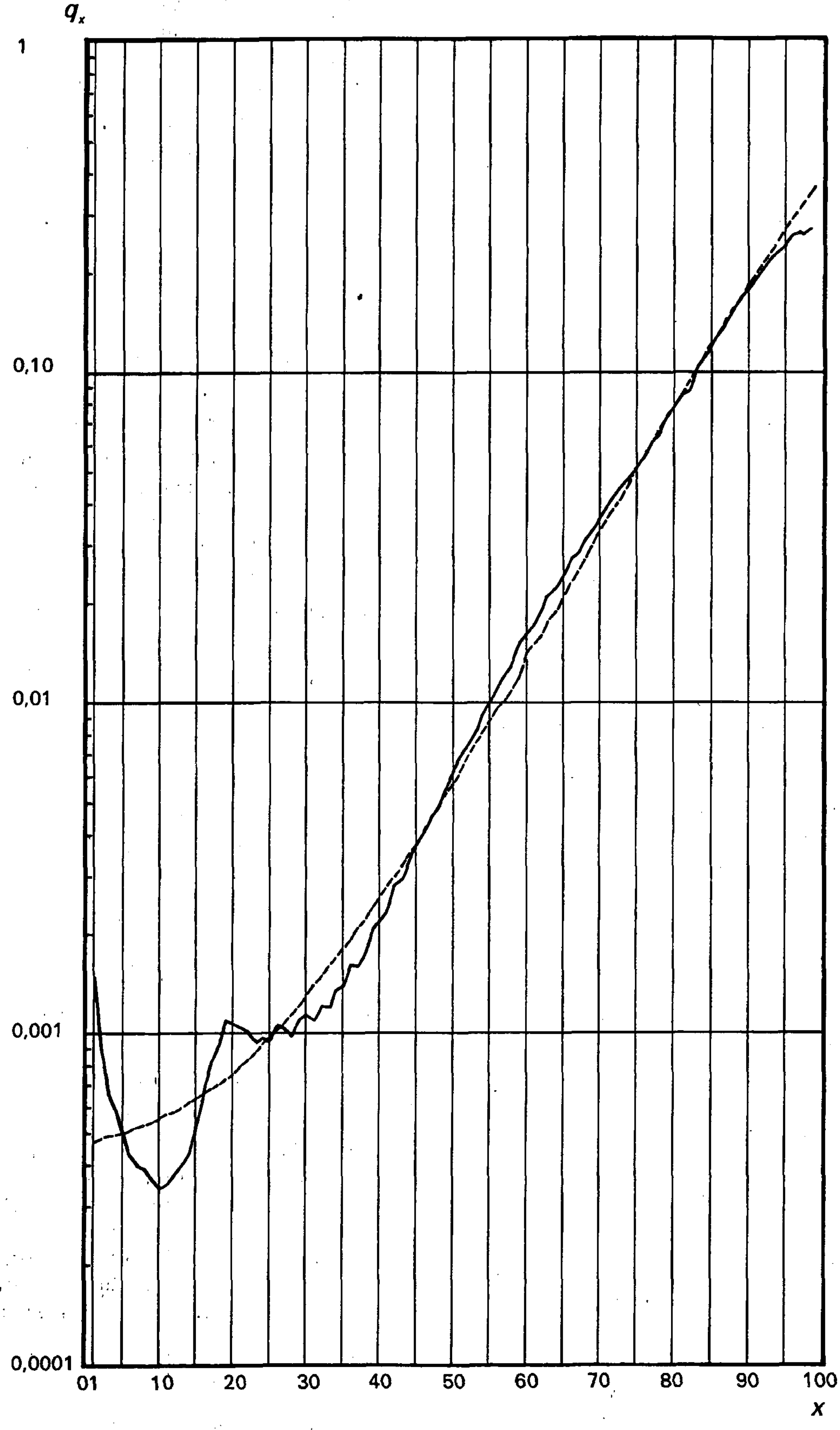
GRAPHIQUE 18.
HFR



GRAPHIQUE 19.
HFR



GRAPHIQUE 20.
HFR



e. *Résumé opérationnel des ajustements proposés.*

Le tableau IV donne les constantes de Makeham pour les trois tables ajustées.

Tableau IV.

HS (1968-1972)		$s = 0.999\ 407\ 845\ 556$ $g = 0.999\ 534\ 389\ 625$ $c = 1.105\ 046\ 034\ 668$
HD (1968-1972)	$0 \leqslant x \leqslant 69$	$s = 0.999\ 147\ 835\ 528$ $g = 0.999\ 731\ 696\ 667$ $c = 1.115\ 094\ 352\ 734$
	$x \geqslant 70$	$s = 0.999\ 147\ 835\ 528$ $g = 0.995\ 564\ 574\ 228$ $c = 1.077\ 130\ 677\ 635$
HFR (1968-1972)		$s = 0.999\ 587\ 967\ 271$ $g = 0.999\ 393\ 260\ 503$ $c = 1.094\ 846\ 272\ 306$

* * *

6. — Commentaires des ajustements.

a. HS (1968-1972).

Cette table convient pour un portefeuille classique composé :

— d'assurances mixtes $10/x : x \geqslant 10$ à échéances dans l'intervalle 60-70 ans.

— d'assurances vie entière.

Cependant les intervalles où la différence entre les probabilités de décès à l'âge x de la table brute et de la table ajustée est élevée, sont trop étendues pour convenir aux combinaisons à fort capital sous risque jusqu'au terme :

— assurances temporaires en cas de décès

— assurances mixtes $10/x : x \leqslant 5$.

En particulier l'intervalle de sous-mortalité 50-70 doit être considéré comme peu adéquat et dangereux pour ces dernières combinaisons (devenant de plus en plus fréquentes), compte tenu de l'évolution de la mortalité masculine à ces âges.

b. HD (1968-1972).

Cette table présente une fidélité remarquable. Les différences entre les moyennes quinquennales des probabilités brutes et ajustées sont très faibles dans l'intervalle 2-66.

La légère sous-mortalité dans l'intervalle 17-24 est sans importance, car la mortalité des assurés est probablement bien inférieure à celle de la table brute; d'abord parce que ces assurés bénéficient encore de la sélection récente, mais surtout parce qu'à ces âges, la mortalité des hommes mariés ou avec charge de famille (donc des assurables en cas de décès) est plus basse que celle des célibataires du même sexe.

En dehors de cet intervalle (17-24), le phénomène de compensation favorable est assuré dans tout l'intervalle 2-66.

L'intervalle 67-75 est caractérisé par une surmortalité. Cette surmortalité est cependant sans grandes conséquences pour les opérations temporaires; au contraire, elle assure le phénomène de compensation favorable pour les opérations sur la vie entière. Remarquons que cette surmortalité provient en grande partie du choix de l'âge 70 comme frontière entre les deux ajustements.

A ce sujet, cet ajustement double entraîne une discontinuité dans l'expression analytique de la loi de mortalité, et de ce fait, l'utilisation de six constantes (avec raccord des ajustements par le taux instantané de mortalité et du nombre de survivants à l'âge 70).

Cet ajustement double rend *théoriquement* inapplicable, l'utilisation de l'âge moyen makehamien.

Pratiquement, il est possible de lever l'interdiction, dans la presque totalité des combinaisons existentes.

En effet,

1 — Le calcul de l'âge moyen reste entièrement applicable avec la première valeur de c, pour toutes les combinaisons pour lesquelles l'âge terme de la tête la plus âgée n'excède pas 70 ans (en pratique donc pour toutes les opérations temporaires) ou, avec la deuxième valeur de c, pour celles dont l'âge à l'origine de la tête la plus jeune est au moins égale à 70 ans.

2 — Il ne reste donc en principe que les opérations sur la vie entière, souscrites avant 70 ans. On peut les subdiviser en trois groupes :

i — les assurances « vie entière » proprement dites sur deux têtes.

Si l'on utilise, pour $x \leqslant 70$, comme âge moyen la moyenne arithmétique des âges obtenus par chacune des valeurs de c, l'erreur est très petite; elle n'excède — de peu du reste — six mois que pour les différences d'âge extrêmes ($x - y \geqslant 30$) *et* les âges extrêmes. Or six mois est l'erreur maximum engendrée par l'arrondissement de l'âge moyen à l'âge entier le plus proche.

Pour $x > 70$, il sufit de prendre l'âge moyen correspondant à la seconde valeur de c.

ii — les opérations de survie sur la vie entière.

Pour ces opérations, deux solutions peuvent être adoptées :

— ou bien, on utilise une table différente pour chaque assuré, et le problème de l'âge moyen ne se pose pas.

— ou bien, on utilise la table HD(1968-1972) pour les deux têtes, et la compensation partielle existant entre la surmortalité de l'assuré en cas de décès et celle de l'assuré en cas de vie autorise l'usage de l'âge moyen correspondant à la première valeur de c ($x < 70$), comme pour les opérations temporaires.

iii — les opérations spéciales sur plusieurs têtes et les risques aggravés.

Pour ces opérations, nécessairement hors tarif, on peut soit effectuer le calcul exact, soit recourir à diverses formules d'approximation.

En résumé, l'inconvénient de l'ajustement double pour l'usage de l'âge moyen, se ramène en pratique à l'établissement d'une ou deux colonnes supplémentaires d'âges à ajouter à celui de la tête la plus jeune (ou à retrancher de celui de la tête la plus âgée), à mettre en regard du tarif « Vie entière sur deux têtes » exclusivement.

On trouvera ces valeurs (calculées avec trois décimales) en annexe 2.

c. HFR(1968-1972).

Cette table est remarquablement fidèle à la table brute corrigée, et notamment dans l'intervalle essentiel (70-90).

La légère sous-mortalité dans l'intervalle (50-70) est admissible; elle constitue d'ailleurs, dans le phénomène de compensation favorable, le pendant de la légère surmortalité aux âges jeunes (laquelle, en raison des taux de mortalité très faibles, est compensée par une marge très petite sur le taux d'intérêt).

Il n'est d'ailleurs pas justifié de rechercher, pour les jeunes âges, une différence trop grande entre les taux de la table « décès » et ceux de la table « vie ». D'abord en raison de la remarque faite sur l'intervalle (17-24) pour la table HD, ensuite parce que, contrairement aux opérations de genre décès, les opérations de genre vie contiennent aussi des assurés d'âge x : $0 \leqslant x \leqslant 5$, dont la mortalité moyenne est supérieure à celle résultant de l'ajustement.

*
* *

7. — Annexes.

1. *Principes généraux pour le choix des bornes de l'ajustement.*

i — Les intervalles A, AB, DE et E n'entrent jamais directement en considération pour l'ajustement des tables brutes; ils sont « ajustés » par prolongement analytique de la fonction obtenue à partir des autres intervalles. Tout ou plus interviennent-ils indirectement, en donnant un poids plus au moins grand aux intervalles voisins.

ii — L'intervalle D n'intervient jamais de manière complète pour la détermination des valeurs de s, g et c, mais uniquement pour fixer ou influencer c. Autrement on risquerait, à cause du poids important de cet intervalle, d'obtenir des valeurs de s fantaisistes et des valeurs de g beaucoup trop éloignées de l'unité; cela en raison de l'affaissement relatif de la mortalité à ces âges et de l'influence de c sur g dans la technique d'optimisation.

iii — L'intervalle B intervient toujours deux fois, pour donner à s des valeurs plus précises que celles obtenues par une première optimisation sur un intervalle plus général, et accroître le phénomène de compensation favorable.

*

2. *Tabulation de la quantité w pour les différentes tables ajustées.*

Le tableau A donne la valeur de

$$w = \frac{1}{ln\, c}\, ln \frac{1 + c^x}{2}$$

$$1 \leqslant x \leqslant 100,$$

pour l'ajustement HS (2[e] colonne)
HFR (6[e] colonne)
HD1 (3[e] colonne)
HD2 (4[e] colonne), ainsi que la moyenne arithmétique des colonnes 3 et 4.

Tableau A.

x	w(HS)	w(HD1)	w(HD2)	$\frac{w(\text{HD1}) + w(\text{HD2})}{2}$	w(HFR)	x
1	0.512	0.514	0.509	0.511	0.511	1
2	1.050	1.054	1.037	1.046	1.045	2
3	1.612	1.622	1.583	1.603	1.602	3
4	2.198	2.216	2.148	2.182	2.180	4
5	2.809	2.836	2.731	2.784	2.781	5
6	3.443	3.482	3.332	3.407	3.403	6
7	4.100	4.152	3.950	4.051	4.046	7
8	4.779	4.845	4.586	4.716	4.710	8
9	5.479	5.561	5.239	5.400	5.393	9
10	6.200	6.299	5.908	6.104	6.096	10
11	6.940	7.058	6.594	6.826	6.817	11
12	7.700	7.835	7.295	7.565	7.557	12
13	8.477	8.631	8.012	8.322	8.313	13
14	9.270	9.444	8.744	9.094	9.085	14
15	10.080	10.274	9.490	9.882	9.874	15
16	10.905	11.118	10.250	10.684	10.676	16
17	11.743	11.975	11.023	11.499	11.493	17
18	12.595	12.846	11.808	12.327	12.323	18
19	13.459	13.728	12.607	13.167	13.166	19
20	14.334	14.622	13.416	14.019	14.020	20
21	15.220	15.525	14.237	14.881	14.885	21
22	16.115	16.437	15.069	15.753	15.760	22
23	17.020	17.358	15.911	16.634	16.645	23
24	17.932	18.286	16.762	17.524	17.538	24
25	18.853	19.221	17.623	18.422	18.440	25
26	19.780	20.162	18.492	19.327	19.350	26
27	20.714	21.110	19.370	20.240	20.267	27
28	21.654	22.062	20.255	21.158	21.191	28
29	22.599	23.019	21.147	22.083	22.120	29
30	23.549	23.980	22.047	23.014	23.056	30
31	24.503	24.946	22.953	23.949	23.996	31
32	25.462	25.914	23.865	24.890	24.942	32
33	26.425	26.886	24.783	25.834	25.892	33
34	27.391	27.861	25.706	26.783	26.846	34
35	28.360	28.838	26.635	27.736	27.804	35
36	29.332	29.817	27.568	28.693	28.765	36
37	30.306	30.799	28.506	29.652	29.730	37
38	31.283	31.782	29.448	30.615	30.698	38
39	32.262	32.767	30.394	31.581	31.668	39
40	33.243	33.754	31.343	32.549	32.641	40
41	34.226	34.742	32.296	33.519	33.616	41
42	35.210	35.731	33.252	34.492	34.593	42
43	36.196	36.722	34.211	35.467	35.572	43
44	37.183	37.713	35.173	36.443	36.553	44
45	38.172	38.705	36.138	37.422	37.536	45
46	39.161	39.698	37.105	38.402	38.520	46
47	40.152	40.692	38.075	39.383	39.505	47
48	41.143	41.686	39.046	40.366	40.492	48
49	42.135	42.681	40.020	41.350	41.480	49
50	43.128	43.677	40.995	42.336	42.469	50
51	44.122	44.673	41.972	43.322	43.459	51
52	45.116	45.669	42.951	44.310	44.449	52
53	46.111	46.666	43.931	45.298	45.441	53
54	47.106	47.663	44.912	46.288	46.433	54
55	48.102	48.660	45.895	47.278	47.426	55
56	49.098	49.658	46.879	48.269	48.419	56
57	50.094	50.656	47.865	49.260	49.413	57

x	w(HS)	w(HD1)	w(HD2)	$\frac{w(\text{HD1}) + w(\text{HD2})}{2}$	w(HFR)	x
58	51.091	51.654	48.851	50.252	50.408	58
59	52.088	52.652	49.838	51.245	51.403	59
60	53.086	53.651	50.826	52.238	52.398	60
61	54.083	54.649	51.815	43.232	53.394	61
62	55.081	55.648	52.805	54.226	54.391	62
63	56.079	56.647	53.795	55.221	55.387	63
64	57.077	57.646	54.786	56.216	56.384	64
65	58.076	58.645	55.778	57.212	57.381	65
66	59.074	59.644	56.771	58.207	58.378	66
67	60.073	60.643	57.763	59.203	59.376	67
68	61.072	61.643	58.757	60.200	60.374	68
69	62.071	62.642	59.751	61.196	61.372	69
70	63.070	63.642	60.745	62.193	62.370	70
71	64.069	64.641	61.740	63.191	63.368	71
72	65.068	65.641	62.735	64.188	64.367	72
73	66.068	66.641	63.730	65.185	65.365	73
74	67.067	67.640	64.726	66.183	66.364	74
75	68.066	68.640	65.722	67.181	67.363	75
76	69.066	69.640	66.718	68.179	68.362	76
77	70.065	70.639	67.715	69.177	69.361	77
78	71.065	71.639	68.712	70.176	70.360	78
79	72.064	72.639	69.709	71.174	71.359	79
80	73.064	73.639	70.706	72.173	72.358	80
81	74.064	74.639	71.704	73.171	73.358	81
82	75.063	75.639	72.701	74.170	74.357	82
83	76.063	76.638	73.699	75.169	75.357	83
84	77.063	77.638	74.697	76.168	76.356	84
85	78.063	78.638	75.695	77.167	77.356	85
86	79.063	79.638	76.694	78.166	78.355	86
87	80.062	80.638	77.692	79.165	79.355	87
88	81.062	81.638	78.691	80.164	80.354	88
89	82.062	82.638	79.689	81.163	81.354	89
90	83.062	83.638	80.688	82.163	82.354	90
91	84.062	84.638	81.687	83.162	83.353	91
92	85.062	85.638	82.686	84.162	84.353	92
93	86.062	86.638	83.684	85.161	85.353	93
94	87.062	87.638	84.684	86.161	86.353	94
95	88.061	88.638	85.683	87.160	87.353	95
96	89.061	89.638	86.682	88.160	88.352	96
97	90.061	90.638	87.681	89.159	89.352	97
98	91.061	91.638	88.680	90.159	90.352	98
99	92.061	92.637	89.680	91.159	91.352	99
100	93.061	93.637	90.679	92.158	92.352	100

A propos d'ajustements makehamiens d'une table de mortalité (*)

1. — Introduction.

La présente note a pour objet :

i — l'analyse actuarielle :

— de l'ajustement makehamien, optimal au sens des moindres carrés, du nombre de survivants à l'âge x, de la table de mortalité brute H + F (1959-1963). [1]

— de l'ajustement induit, pour la même table, de la probabilité de décès à l'âge x.

ii — la recherche par une méthode numérique itérative et pour la table précitée, sur des intervalles d'âge déterminés, des estimateurs makehamiens, optimaux au sens des moindres carrés, des paramètres de l'ajustement de la probabilité de décès à l'âge x.

iii — la comparaison des différents ajustements ainsi obtenus et celui réalisé par l'Union Professionnelle des Entreprises d'Assurances. [2] [3]

*

Cette publication formule des conclusions qui pourraient être mises en œuvre lors de l'ajustement des tables de mortalité brutes H, F, H + F (1968-1972), issues du recensement effectué au 31 décembre 1970.

* *
*

(*) Article rédigé par Yves BALLEGEER et Jean-Pierre ANDRE-DUMONT. Les auteurs remercient Monsieur P. BAERT pour les remarques et suggestions qu'il a bien voulu leur faire pour la rédaction de cet article.

2. — Ajustement makehamien, optimal au sens des moindres carrés, du nombre de survivants de la table brute H + F (1959-1963).

a. *Résumé de l'ajustement.*

On peut résumer l'ajustement makehamien, optimal au sens des moindres carrés, du nombre de survivants à l'âge x de la table brute H + F (1959-1963), par le tableau suivant :

Ecart relatif entre le nombre de survivants brut et le nombre de survivants ajusté.	Intervalles d'âge.
< 1 %	$17 \leqslant x \leqslant 85$
< 2 %	$5 \leqslant x \leqslant 87$

Le même tableau, établi pour l'ajustement U.P.E.A., donne :

< 1 %	$x = 97$
< 2 %	$71 \leqslant x \leqslant 78$

Cependant, la fin de l'ajustement ($x \geqslant 93$) se révèle mauvais par rapport à l'ajustement U.P.E.A.

Ce résumé est illustré par les graphiques I à VI, qui présentent la quantité $\frac{l_x}{l_0}$ en fonction de x, respectivement pour les intervalles d'âge :

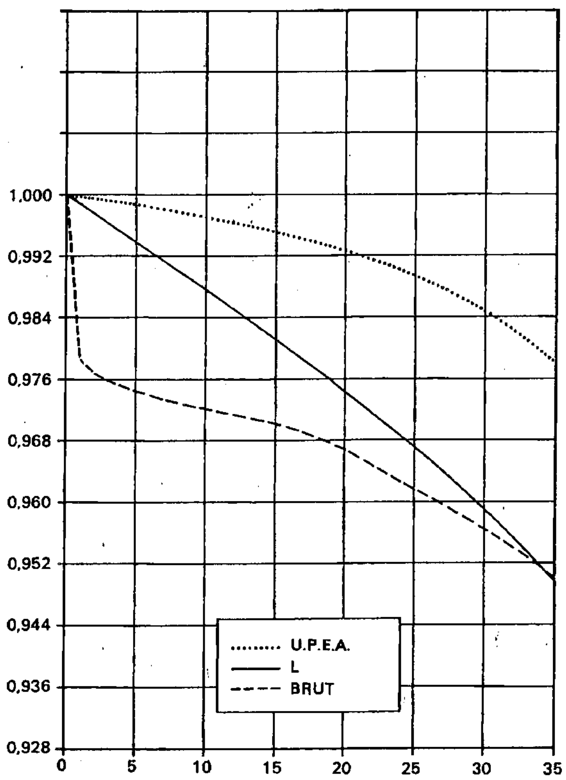
$$0 \leqslant x \leqslant 35 \text{ (I)}; \quad 36 \leqslant x \leqslant 51 \text{ (II)};$$
$$52 \leqslant x \leqslant 67 \text{ (III)}; \quad 68 \leqslant x \leqslant 77 \text{ (IV)};$$
$$78 \leqslant x \leqslant 100 \text{ (V)}; \quad 0 \leqslant x \leqslant 100 \text{ (VI)}.$$

Chaque graphique comporte trois courbes; ces courbes représentent la quantité $\frac{l_x}{l_0}$ calculée respectivement pour :

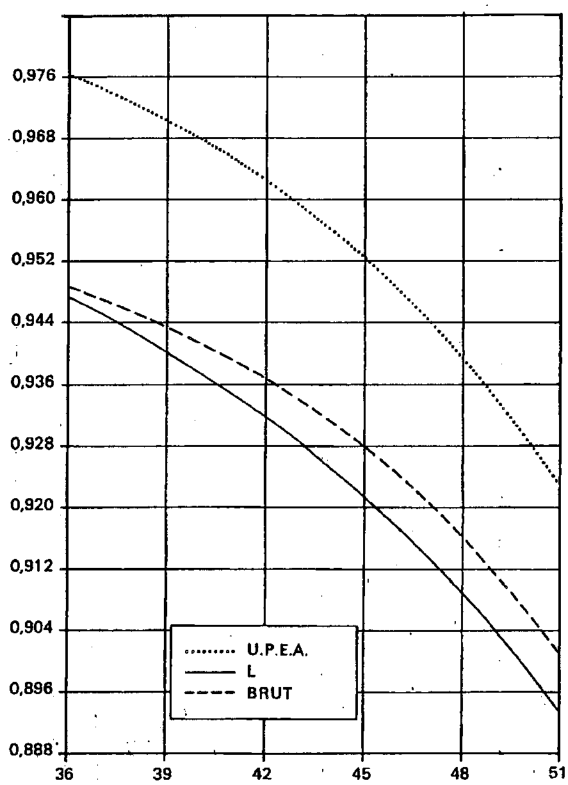
la table brute (Légende : ------ BRUT)
la table U.P.E.A. (Légende : ..... U.P.E.A.)
la table optimale (Légende : —— L)

*

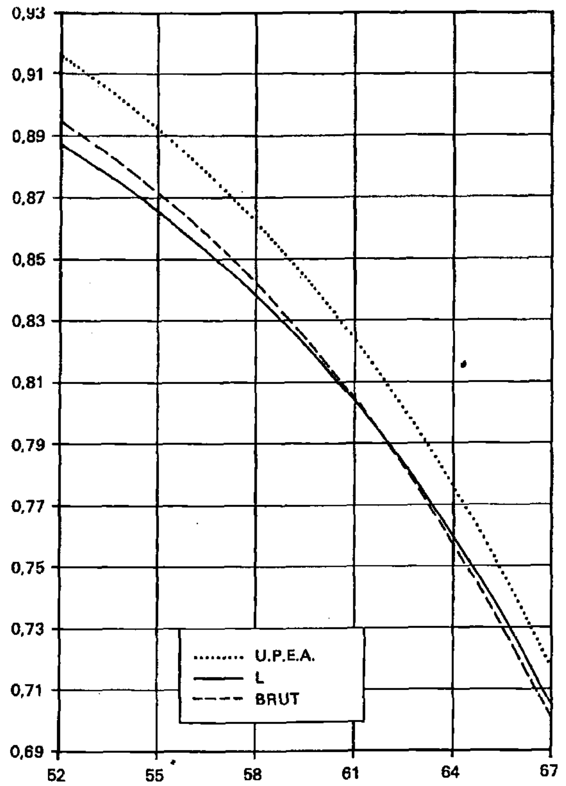
GRAPHIQUE I.



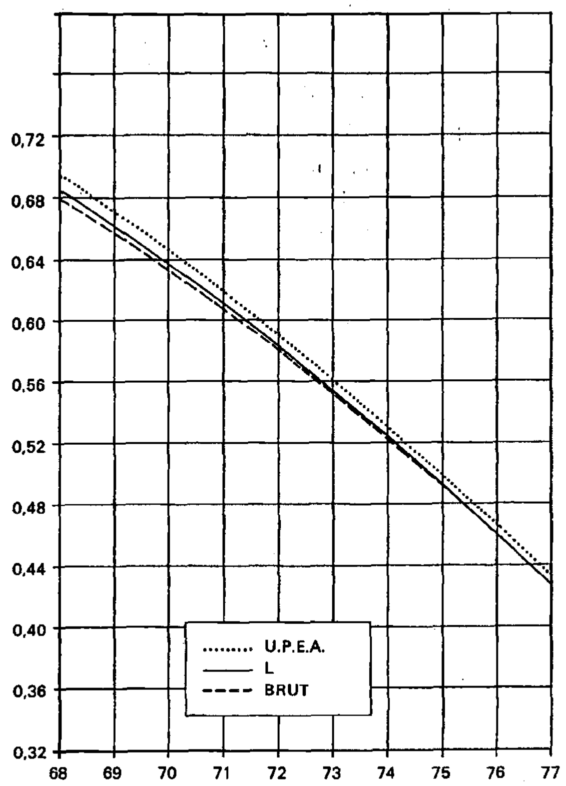
GRAPHIQUE II.



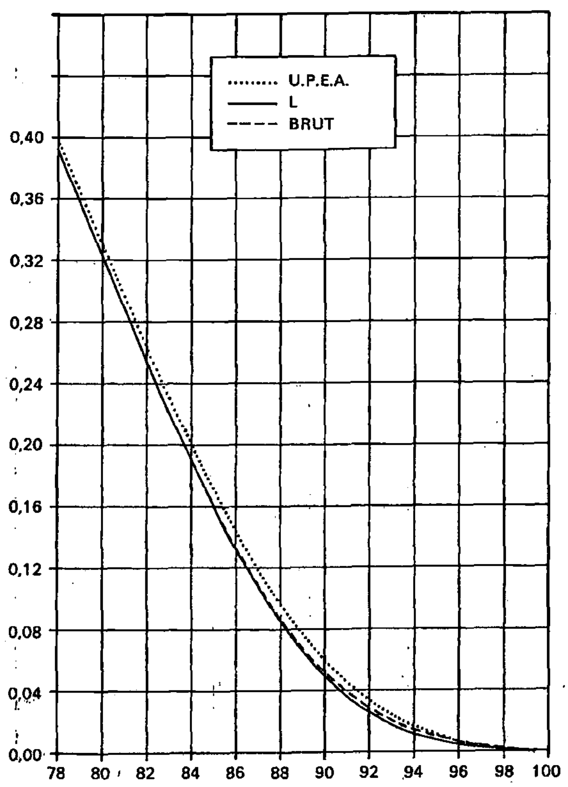
GRAPHIQUE III.



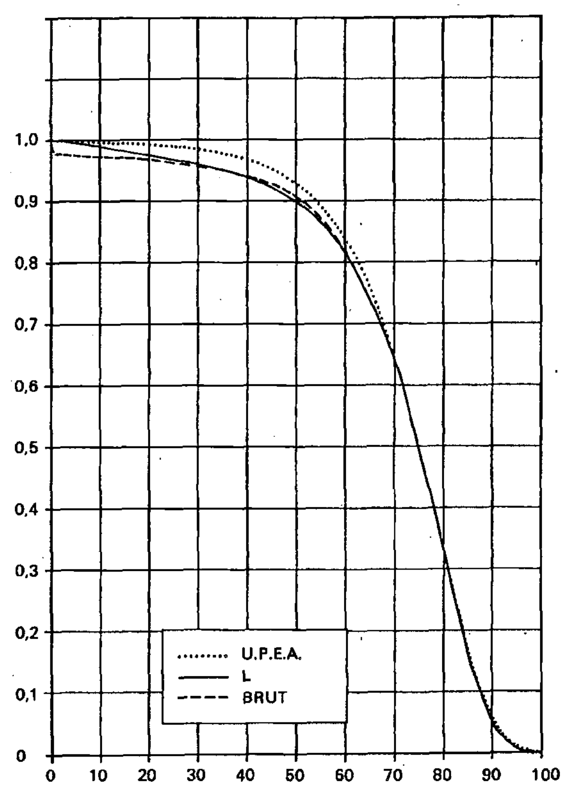
GRAPHIQUE IV.



GRAPHIQUE V.



GRAPHIQUE VI.



b. *Ajustement induit de la probabilité de décès.*

L'ajustement makehamien, optimal au sens des moindres carrés, du nombre de survivants, induit un ajustement de la probabilité de décès. Ce dernier se révèle, du point de vue des moindres carrés, mauvais par rapport à l'ajustement de la probabilité de décès, résultant des calculs effectués par l'U.P.E.A. (1)

Cependant, l'ajustement induit de la probabilité de décès par celui du nombre de survivants se révèle localement meilleur que celui de l'U.P.E.A., pour les intervalles d'âge suivantes :

$$0 \leqslant x \leqslant 2;\quad 21 \leqslant x \leqslant 23;\quad 47 \leqslant x \leqslant 50;$$

$$x = 52;\quad 66 \leqslant x \leqslant 73;\quad 76 \leqslant x \leqslant 87.$$

Les quatre premières intervalles ne présentent guère d'intérêt; en regroupant les deux dernières, on conclut que l'ajustement de la probabilité de décès, résultant de celui du nombre de survivants est meilleur que l'ajustement de la probabilité de décès, résultant de l'U.P.E.A., pour $65 \leqslant x \leqslant 85$ (2).

(1) La somme des carrés des écarts entre les probabilités de décès brutes et celles résultant de l'ajustement du nombre de survivants, vaut 0,096; tandis que la somme des carrés des écarts entre les probabilités de décès brutes et celles résultant de l'ajustement de l'U.P.E.A., vaut 0,026.

(2) La somme des carrés des écarts entre les probabilités de décès brutes et celles résultant de l'ajustement de nombre de survivants, vaut 0,00003; tandis que la somme des carrés des écarts entre les probabilités de décès brutes et celles résultant de l'ajustement de l'U.P.E.A., vaut 0,0004.

Le tableau I et les graphiques VII à XIV illustrent ces conclusions.

Le tableau I comporte 6 colonnes donnant respectivement :

x	âge
q_x	probabilité de décès brute à l'âge x
$q_x(l)$	probabilité de décès à l'âge x, résultant de l'ajustement du nombre de survivants
q_x(U.P.E.A.)	probabilité de décès à l'âge x, résultant de l'ajustement présenté par l'U.P.E.A.
% (l)	$\dfrac{q_x - q_x(l)}{q_x} 100$
% (U.P.E.A.)	$\dfrac{q_x - q_x(\text{U.P.E.A.})}{q_x} 100$

Les graphiques VII à XIV représentent les quantités : q_x, $q_x(l)$, q_x(U.P.E.A.) respectivement pour les intervalles d'âge :

$$0 \leqslant x \leqslant 35 \text{ (VII)};\quad 36 \leqslant x \leqslant 51 \text{ (VIII)};$$

$$52 \leqslant x \leqslant 67 \text{ (IX)};\quad 68 \leqslant x \leqslant 77 \text{ (X)};$$

$$78 \leqslant x \leqslant 100 \text{ (XI)};\quad 45 \leqslant x \leqslant 75 \text{ (XII)};$$

$$50 \leqslant x \leqslant 70 \text{ (XIII)};\quad 65 \leqslant x \leqslant 90 \text{ (XIV)}$$

*

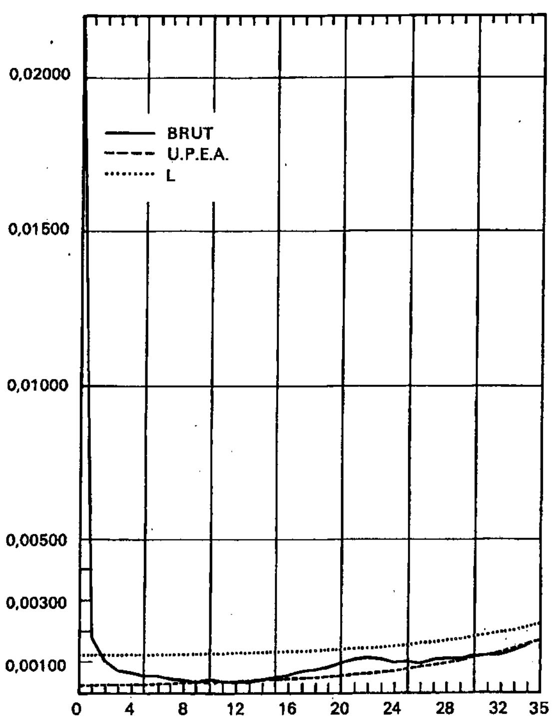
Tableau I.

x	q_x	$q_x(l)$	q_x(U.P.E.A.)	% (l)	% (U.P.E.A.)
0	0.021470	0.001233	0.000266	94.26	98.76
1	0.001790	0.001236	0.000272	30.94	84.82
2	0.001040	0.001240	0.000278	− 19.20	73.29
3	0.000750	0.001244	0.000284	− 65.81	62.07
4	0.000660	0.001248	0.000292	− 89.06	55.78
5	0.000570	0.001253	0.000300	− 119.74	47.37
6	0.000570	0.001258	0.000309	− 120.66	45.81
7	0.000470	0.001264	0.000319	− 168.84	32.20
8	0.000410	0.001270	0.000329	− 209.75	19.65
9	0.000360	0.001277	0.000341	− 254.75	5.20
10	0.000430	0.001285	0.000354	− 198.84	17.61
11	0.000380	0.001294	0.000369	− 240.47	3.01
12	0.000370	0.001304	0.000384	− 252.30	− 3.86
13	0.000370	0.001314	0.000402	− 255.21	− 8.53
14	0.000430	0.001326	0.000421	− 208.43	2.20
15	0.000520	0.001340	0.000441	− 157.60	15.11
16	0.000590	0.001354	0.000464	− 129.53	21.30

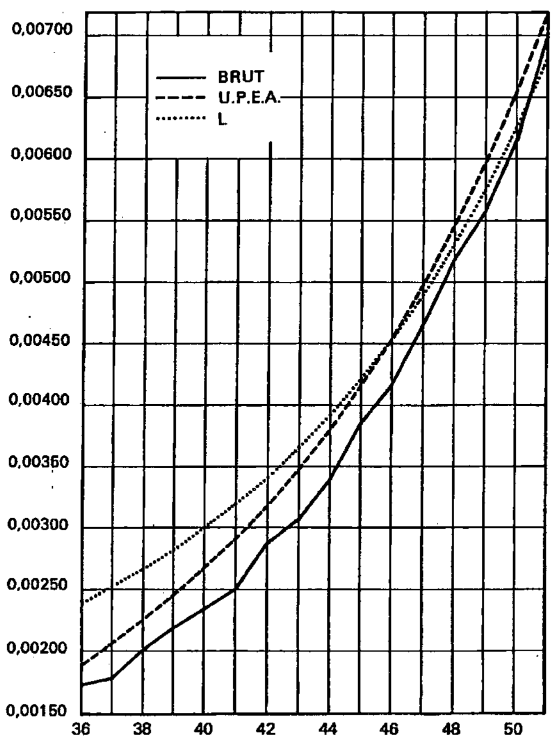
x	q_x	$q_x(l)$	q_x(U.P.E.A.)	% (l)	% (U.P.E.A.)
17	0.000710	0.001371	0.000490	−93.04	31.05
18	0.000770	0.001389	0.000517	−80.35	32.82
19	0.000860	0.001409	0.000548	−63.81	36.31
20	0.000980	0.001431	0.000581	−46.02	40.69
21	0.001110	0.001456	0.000618	−31.14	44.32
22	0.001160	0.001483	0.000659	−27.85	43.23
23	0.001110	0.001513	0.000703	−36.35	36.66
24	0.001000	0.001547	0.000752	−54.72	24.81
25	0.001030	0.001585	0.000806	−53.84	21.78
26	0.000980	0.001626	0.000865	−65.91	11.76
27	0.001100	0.001672	0.000930	−51.99	15.48
28	0.001130	0.001723	0.001001	−52.47	11.41
29	0.001120	0.001779	0.001079	−58.87	3.62
30	0.001230	0.001842	0.001166	−49.76	5.23
31	0.001250	0.001912	0.001260	−52.93	−0.84
32	0.001260	0.001989	0.001365	−57.83	−8.31
33	0.001400	0.002074	0.001479	−48.15	−5.65
34	0.001560	0.002169	0.001605	−39.03	−2.88
35	0.001530	0.002274	0.001743	−48.63	−13.94
36	0.001730	0.002391	0.001895	−38.19	−9.56
37	0.001780	0.002520	0.002062	−41.57	−15.87
38	0.002010	0.002663	0.002246	−32.50	−11.74
39	0.002190	0.002822	0.002448	−28.87	−11.77
40	0.002340	0.002999	0.002670	−28.15	−14.09
41	0.002500	0.003194	0.002913	−27.76	−16.53
42	0.002880	0.003411	0.003181	−18.43	−10.46
43	0.003070	0.003651	0.003476	−18.93	−13.21
44	0.003390	0.003918	0.003799	−15.57	−12.07
45	0.003850	0.004213	0.004155	−9.44	−7.91
46	0.004160	0.004541	0.004545	−9.16	−9.26
47	0.004660	0.004904	0.004974	−5.24	−6.74
48	0.005190	0.005307	0.005446	−2.25	−4.93
49	0.005570	0.005753	0.005964	−3.29	−7.07
50	0.006160	0.006248	0.006533	−1.43	−6.06
51	0.006980	0.006797	0.007158	2.62	−2.56
52	0.007600	0.007405	0.007845	2.57	−3.23
53	0.008440	0.008079	0.008600	4.28	−1.89
54	0.009430	0.008826	0.009428	6.41	0.02
55	0.010110	0.009654	0.010339	4.51	−2.26
56	0.011440	0.010571	0.011338	7.60	0.89
57	0.012700	0.011587	0.012436	8.76	2.08
58	0.013860	0.012713	0.013641	8.27	1.58
59	0.015080	0.013961	0.014964	7.42	0.77
60	0.016690	0.015342	0.016416	8.08	1.64
61	0.017960	0.016872	0.018010	6.06	−0.28
62	0.020060	0.018566	0.019759	7.45	1.50
63	0.021820	0.020442	0.021678	6.32	0.65
64	0.023860	0.022518	0.023783	5.63	0.32
65	0.025840	0.024815	0.026092	3.97	−0.97
66	0.027920	0.027356	0.028623	2.02	−2.52
67	0.030530	0.030167	0.031399	1.19	−2.85
68	0.033300	0.033275	0.034440	0.08	−3.42
69	0.036710	0.036710	0.037773	−0.00	−2.89
70	0.040010	0.040506	0.041422	−1.24	−3.53
71	0.044250	0.044698	0.045418	−1.01	−2.64
72	0.048570	0.049326	0.049792	−1.56	−2.52
73	0.053350	0.054433	0.054576	−2.03	−2.30
74	0.058720	0.060065	0.059807	−2.29	−1.85
75	0.065690	0.066272	0.065524	−0.89	0.25
76	0.073360	0.073108	0.071768	0.34	2.17

x	q_x	$q_x(l)$	q_x(U.P.E.A.)	% (l)	% (U.P.E.A.)
77	0.081380	0.080631	0.078584	0.92	3.44
78	0.088270	0.088903	0.086019	−0.72	2.55
79	0.097600	0.097991	0.094122	−0.40	3.56
80	0.106630	0.107964	0.102946	−1.25	3.45
81	0.116580	0.118896	0.112547	−1.99	3.46
82	0.128510	0.130863	0.122982	−1.83	4.30
83	0.142070	0.143946	0.134311	−1.32	5.46
84	0.156990	0.158226	0.146596	−0.79	6.62
85	0.171400	0.173785	0.159899	−1.39	6.71
86	0.184090	0.190706	0.174283	−3.59	5.33
87	0.205400	0.209067	0.189810	−1.79	7.59
88	0.214120	0.228943	0.206542	−6.92	3.54
89	0.233720	0.250405	0.224535	−7.14	3.93
90	0.250960	0.273509	0.243844	−8.99	2.84
91	0.270600	0.298302	0.264515	−10.24	2.25
92	0.287100	0.324811	0.286586	−13.14	0.18
93	0.301010	0.353041	0.310083	−17.28	−2.98
94	0.324740	0.382973	0.335021	−17.93	−3.17
95	0.336550	0.414553	0.361394	−23.18	−7.38
96	0.336600	0.447690	0.389180	−33.00	−15.62
97	0.380650	0.482253	0.418330	−26.69	−9.90
98	0.372580	0.518062	0.448771	−39.05	−20.45
99	0.364380	0.554889	0.480397	−52.28	−31.84

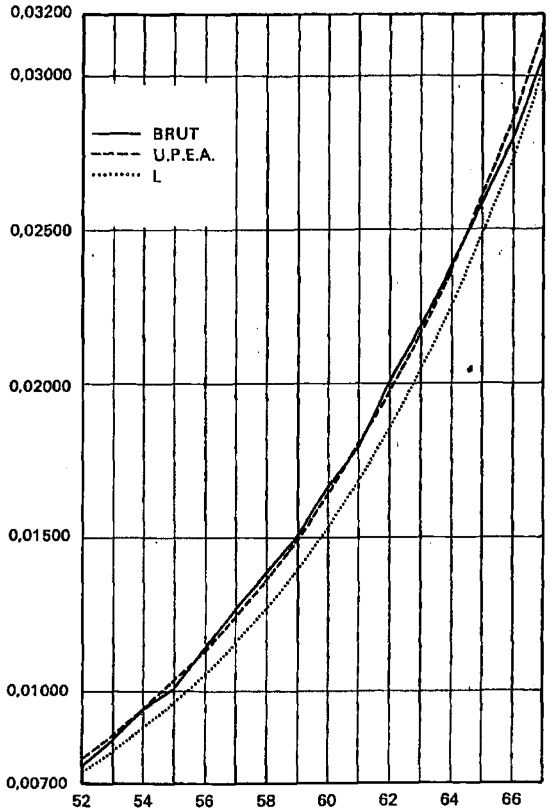
GRAPHIQUE VII.



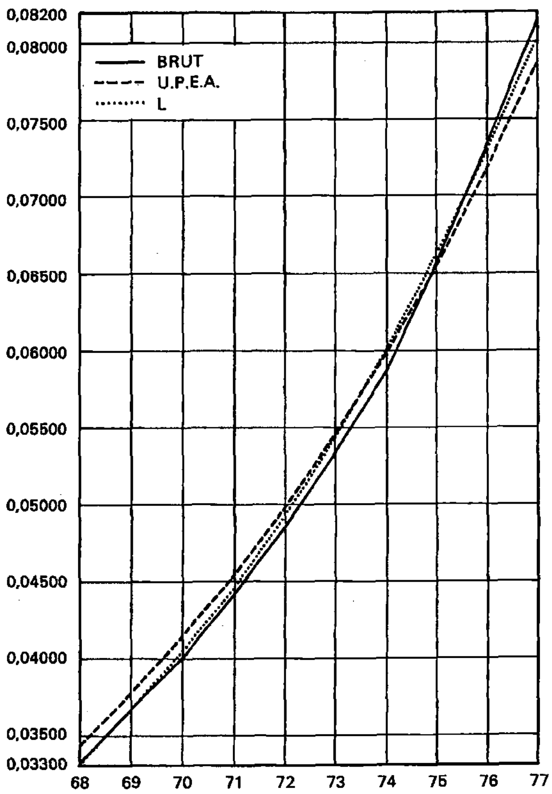
GRAPHIQUE VIII.



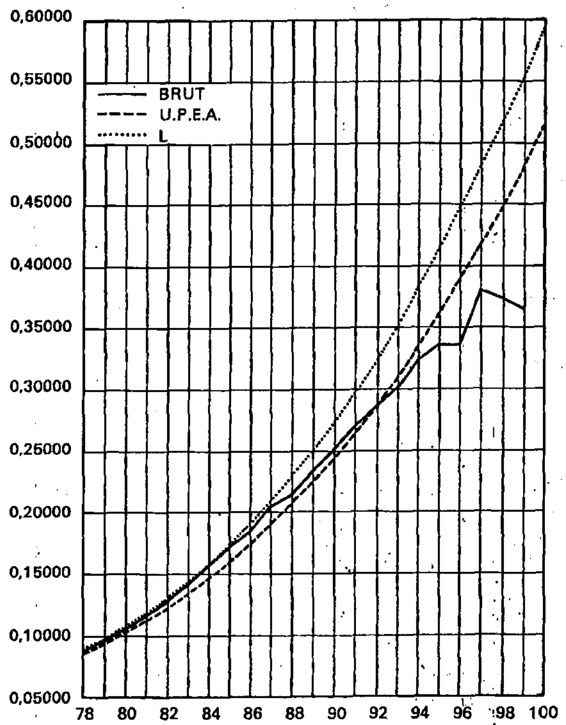
GRAPHIQUE IX.



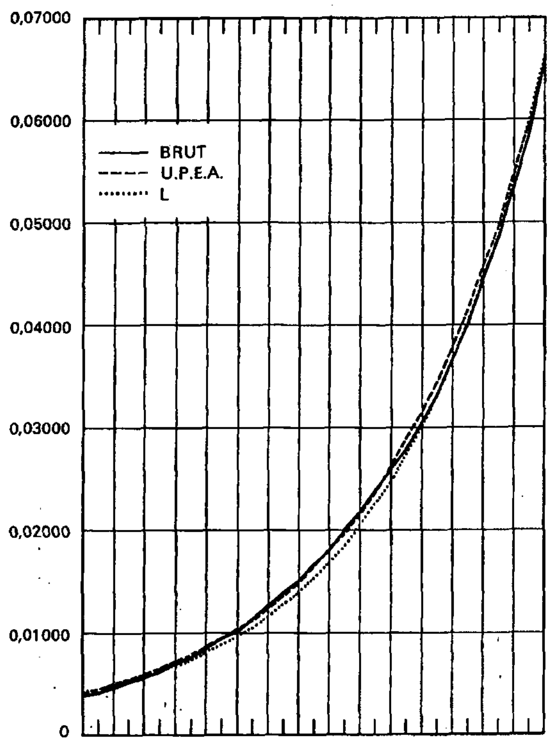
GRAPHIQUE X.



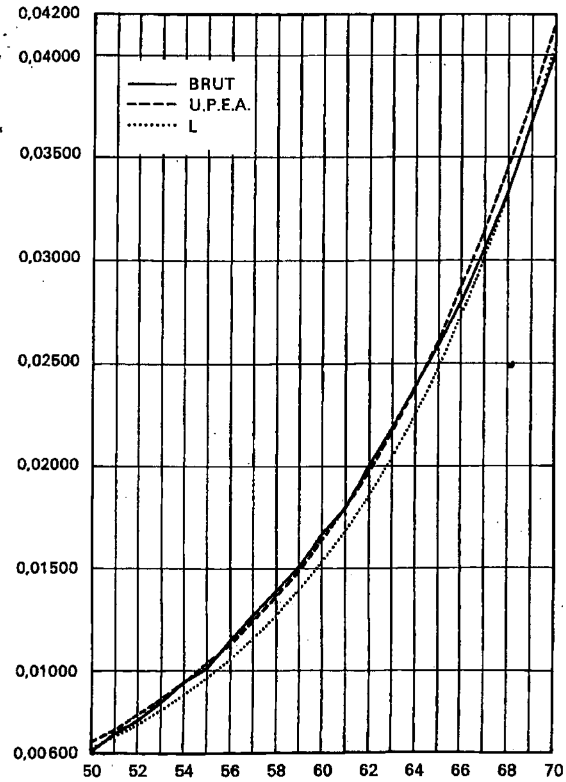
GRAPHIQUE XI.



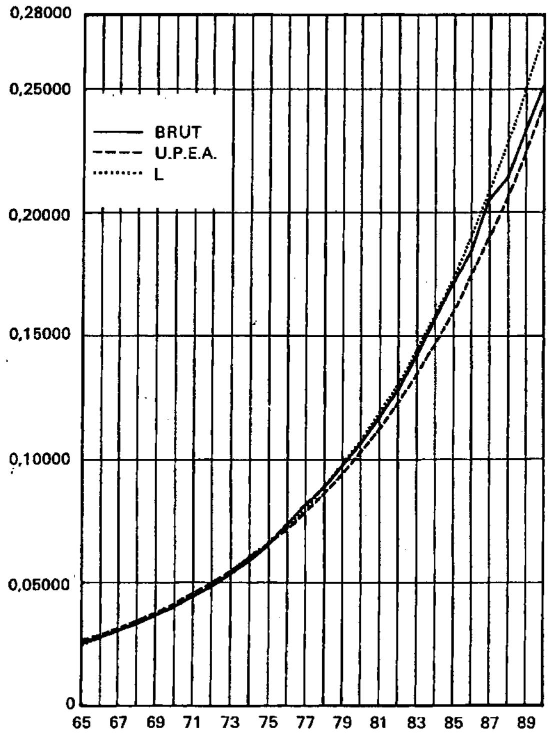
GRAPHIQUE XII.



GRAPHIQUE XIII.



GRAPHIQUE XIV.



c. *Analyse actuarielle de l'ajustement du nombre de survivants et de l'ajustement induit de la probabilité de décès.*

Pour les besoins de l'assurance, une table brute à ajuster doit correspondre à la mortalité des assurés. Ce n'est pas nécessairement le cas pour les tables brutes établies à partir des recensements généraux de la population. Il peut alors être indiqué de modifier (1) ces tables brutes afin de corriger cette discordance.

Tant pour pallier les écarts accidentels que pour obvier aux effets d'une évolution défavorable de la mortalité, il s'indique que les éléments de mortalité des tarifs contiennent une certaine marge de sécurité. Cette marge peut être introduite, soit implicitement par une modification des taux de mortalité, soit explicitement par des chargements supplémentaires (action sur les q_x) ou des corrections d'âge (action sur les x), sans préjudice des règles de sélection qui n'interviennent en principe qu'en fonction des taux déjà adoptés.

(1) Ces modifications pourraient avoir lieu à partir des données fournies à l'Autorité de Contrôle par les entreprises d'assurances.

La forme explicite est de loin préférable, car elle permet de garder à l'esprit la différence entre les taux de mortalité avant et après l'introduction des correctifs.

Nous ne nous intéresserons donc qu'à la table sans chargement de sécurité.

Pour qu'un ajustement de celle-ci convienne au point de vue actuariel, il faut tenir compte de deux conditions :

i — si, au point de vue statistique, les écarts de même valeur absolue mais de signe contraire peuvent être considérés comme équivalents, il n'en est pas de même au point de vue actuariel : une sous-tarification, même légère, présente des inconvénients supérieurs à ceux résultant d'une surtarification de même importance.

Il en résulte que, à qualités statistiques comparables, un ajustement présentant des écarts dans le sens de la sécurité est préférable à celui présentant les caractéristiques opposées. C'est ce que nous appelons la *condition de sécurité* qu'il ne faut pas confondre avec l'introduction d'un chargement implicite de sécurité qui n'a, ni le même but, ni surtout la même importance numérique.

ii — pour respecter l'équité entre les assurés, il importe d'éviter que les écarts soient systématiques sur un intervalle trop étendu, alors même qu'ils le sont, en sens contraire, sur d'autres intervalles importants. C'est ce que nous appelons la *condition de régularité*.

En l'absence de toute forme analytique imposée à la fonction l_x, la condition de régularité se confond pratiquement avec la fidélité statistique, et la condition de sécurité n'a plus de raison d'être.

Ce n'est plus le cas en revanche, lorsque la mortalité réelle, même après élimination des écarts accidentels, s'écarte plus ou moins d'une mortalité théorique représentée par exemple par une loi de Makeham.

En pratique, entre des ajustements de qualités très voisines au point de vue statistique, et pour lesquels la condition de régularité est suffisamment observée compte tenu des exigences analytiques, on choisira de préférence ceux qui respectent la condition de sécurité au moins aux âges les plus importants au point de vue actuariel. C'est ce que nous appelons la *condition de compensation favorable*.

*

La table brute H + F (1959-1963) a donné naissance à la table ajustée suivant le schéma de Makeham : H + F (1959-63)M_k [2], utilisée dans le calcul des réserves minima, imposées par l'Arrêté Royal du 30 septembre 1968, et dans les tarifs correspondants pour les opérations de genre vie.

On peut dire que pour ces opérations et pour des assurés d'âge compris entre 5 et 70 ans (voire un peu au-delà, c'est-à-dire en fait jusqu'à l'âge-terme extrême des opérations de genre vie autres que les rentes viagères non temporaires) la table brute en question convient au sens de la condition de sécurité

L'ajustement induit des q_x à partir de l'ajustement optimal des l_x présente, de toute évidence, des défauts sensibles au sens de la sécurité avant l'âge de 50 ans, et au sens de la régularité pour l'intervalle :

$$5 \leqslant x \leqslant 70.$$

On devrait donc, à première vue, considérer cet ajustement comme inférieur en qualité à l'ajustement U.P.E.A., mais ce jugement doit subir deux corrections importantes :

i — dans les opérations de genre vie (entendant par là les combinaisons d'assurance pour lesquelles une diminution de la mortalité entraîne généralement une augmentation des primes pures, à l'inverse des opérations de genre décès), ce ne sont pas les écarts relatifs par rapport aux q_x qui importent, mais bien ceux par rapport aux p_x. Autrement dit, les écarts $q_x - q_x^{(I)} = p_x^{(I)} - p_x$ doivent être rapportés, non à q_x mais à p_x. Les valeurs importantes que l'on trouve pour $x \leqslant 50$, à la cinquième colonne du tableau I se réduisent alors à des quantités beaucoup plus petites.

ii — la règle de compensation favorable joue considérablement en faveur de l'ajustement induit.

En effet, à l'exception des rentes viagères immédiates, les opérations de genre vie ont, en début de contrat, des capitaux sous risque négatifs (1) mais de faibles valeurs absolues; en fin de contrat au contraire, ces valeurs absolues deviennent considérables, en même temps que la réserve du contrat.

Or c'est précisément aux âges atteints dans la dernière période des contrats que les q_x de l'ajustement induit, présentent des écarts favorables. Au contraire, l'ajustement U.P.E.A. présente des compensations beaucoup moins favorables : à l'excès de sécurité qu'il présente aux âges où cette sécurité est secondaire, correspond un défaut de sécurité là où elle est la plus importante.

Ces conclusions doivent naturellement être inversées pour les rentes viagères immédiates.

Observons toutefois :

— que pour les jeunes âges, ces combinaisons sont fort rares et que les pertes de mortalité, forcément réduites en raison de la petitesse du rapport $\frac{q_x}{p_x}$, y sont facilement compensées par une très faible marge de sécurité sur le taux d'intérêt.

— que pour l'intervalle d'âge : $50 \leqslant x \leqslant 70$, l'ajustement induit est favorable.

Qu'en est-il dans les zones extrêmes des tables?

On sait que l'ajustement makehamien ne convient pas aux premiers âges de la table, pour l'excellente raison que la mortalité y est décroissante. Ce défaut de représentativité, fâcheux sur le plan biométrique, l'est beaucoup moins sur le plan actuariel, parce que la somme des valeurs absolues des capitaux sous risque pour ces âges, est dérisoire par rapport à la même somme étendue à tous les âges pour un même portefeuille.

(1) Quelques combinaisons ont, au début de contrat, des capitaux sous risque positifs; la condition de sécurité joue alors parfaitement pour l'ajustement induit.

Plus grave est le problème des âges terminaux. En effet, pour les opérations de genre vie, ces âges n'interviennent guère que dans les combinaisons de rentes viagères immédiates qui sont d'ailleurs le plus souvent souscrites à ces âges.

Or à la différence qui existe, en raison du mode de vie des rentiers, entre leur mortalité et la mortalité générale, vient s'ajouter le rôle considérable de l'antisélection.

De plus, les ajustements makehamiens, et particulièrement l'ajustement induit étudié, présentent des écarts positifs entre les q_x ajustés et bruts.

Il s'en suit que tout ajustement de la table brute entière, à partir d'une formule unique de Makeham ne s'accorde d'aucune manière avec la mortalité observée aux âges élevés pour les opérations de genre vie.

Il importe donc, pour ces âges et opérations, de rechercher des lois spécifiques.

*

3. — Ajustement makehamien optimal au sens des moindres carrés, de la probabilité de décès à l'âge x, de la table brute H + F (1959-1963).

a. *Méthode.*

On peut obtenir les estimations optimales au sens des moindres carrés, des paramètres de l'ajustement makehamien de la probabilité de décès à l'âge x, par la méthode itérative de Newton-Raphson.

Comme l'expression makehamienne de la probabilité de décès est fonction de trois paramètres, le système non linéaire à résoudre est d'ordre trois. Il peut s'écrire :

$$\bar{F}(\bar{P}) = \bar{0}, \text{ où :}$$

$\bar{P}$ est le vecteur dans R^3, dont les composantes constituent la solution du système, et $\bar{F}$ le vecteur dont les composantes constituent les premiers membres des équations du système à résoudre.

La formule itérative de Newton-Raphson s'écrit :

$$\bar{P}_{n+1} = \bar{P}_n - [M(\bar{P}_n)]^{-1}\,[\bar{F}(\bar{P}_n)]$$

Elle exige à chaque itération la résolution d'un système linéaire. La condition d'existence de la suite $\bar{P}_n$ est qu'en tout point de cette suite, la matrice $[M(\bar{P}_n)]$ soit inversible.

*

La probabilité de décès à l'âge x a pour expression :

$$q_x = 1 - sg^{c^{x}(c-1)}$$

La somme à rendre minimum s'écrit :

$$S = \sum_{x=A}^{x=B} [sg^{c^{x}(c-1)} - p_x{}^{(b)}]^2$$

où $p_x{}^{(b)}$ représente la probabilité brute de survie à l'âge x.

Les conditions $\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{\partial S}{\partial g} = \frac{\partial S}{\partial c} = 0$ conduisent au système des équations des moindres carrés :

$$F_1(s, g, c) = F_2(s, g, c) = F_3(s, g, c) = 0.$$

On obtient les éléments de la matrice de Newton-Raphson, en prenant les dérivées partielles des F_i par rapport aux paramètres : s, g, c.

* * *

b. *Ajustement de la partie de la table:* $25 \leqslant x \leqslant 80$.

Partant des valeurs des paramètres de Makeham, obtenues par l'ajustement optimal du nombre de survivants :

$$s_0 = 0{,}998\ 795\ 409\ 4$$
$$g_0 = 0{,}999\ 737\ 914\ 0$$
$$c_0 = 1{,}109\ 079\ 112\ 4\ ,$$

la méthode itérative de Newton-Raphson conduit aux valeurs optimales suivantes :

$$s^* = 0{,}999\ 430\ 940\ 7$$
$$g^* = 0{,}999\ 629\ 131\ 4$$
$$c^* = 1{,}104\ 696\ 166\ 2$$

Ces valeurs correspondent à un taux instantané de mortalité :

$$\mu_x = \alpha + \beta c^{*x},$$

où :

$$\alpha = 0{,}000\ 569\ 221\ 3$$
$$\beta = 0{,}000\ 036\ 934\ 4.$$

On remarquera que :

i — le triplet $[s^*, g^*, c^*]$ est acceptable, car :

$$s^* < 1; \quad g^* < 1; \quad c^* > 1.$$

ii — le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre l'optimum est égal à 7.

iii — la somme à rendre minimum :

$$\sum_{x=25}^{80} [sg^{c^{x}(c-1)} - p_x\text{brut}]^2$$

prend au départ la valeur :

$$S_0 = 0{,}254 \quad 880.10^{-4}$$

et prend à l'optimum, la valeur :

$$S^* = 0{,}192 \quad 679.10^{-4}$$

iv — les premiers membres des équations des moindres carrés prennent au départ, les valeurs :

$$F_1(s_0, g_0, c_0) = -\ 0{,}01$$

$$F_2(s_0, g_0, c_0) = -\ 7{,}72$$

$$F_3(s_0, g_0, c_0) = -\ 66{,}78$$

tandis qu'à l'optimum, ces premiers membres prennent les valeurs :

$$F_1(s^*, g^*, c^*) = 0{,}6 \cdot 10^{-12}$$

$$F_2(s^*, g^*, c^*) = 0{,}9 \cdot 10^{-9}$$

$$F_3(s^*, g^*, c^*) = 0{,}7 \cdot 10^{-8}$$

v — la somme des carrés des écarts entre les q_x bruts et les q_x ajustés vaut $0{,}192\ 679 \cdot 10^{-4}$; tandis que la somme des carrés des écarts entre les q_x bruts et les q_x ajustés par l'U.P.E.A. vaut $0{,}547\ 090 \cdot 10^{-4}$.

vi — les deux ajustements peuvent être résumés par les inégalités :

$$\sum_{x=25}^{80} (l_x - l_x\text{brut})^2 = 0{,}149\ 482 \cdot 10^9$$

$$< \sum_{x=25}^{80} (l_x\text{U.P.E.A.} - l_x\text{brut})^2 = 0{,}261\ 616 \cdot 10^9$$

$$\sum_{x=25}^{80} (q_x - q_x\text{brut})^2 = 0{,}192\ 679 \cdot 10^{-4}$$

$$< \sum_{x=25}^{80} (q_x\text{U.P.E.A.} - q_x\text{brut})^2 = 0{,}547\ 090 \cdot 10^{-4}$$

$$\sum_{x=25}^{80} |l_x - l_x\text{brut}| = 0{,}893\ 251 \cdot 10^5$$

$$< \sum_{x=25}^{80} |l_x\text{U.P.E.A.} - l_x\text{brut}| = 0{,}114\ 673 \cdot 10^6$$

$$\sum_{x=25}^{80} |q_x - q_x\text{brut}| = 0{,}025\ 081$$

$$< \sum_{x=25}^{80} |q_x\text{U.P.E.A.} - q_x\text{brut}| = 0{,}032\ 491$$

*

On trouve dans le tableau II, les valeurs de :

x : âge

q_x : probabilité de décès brute à l'âge x

q_x^* : probabilité de décès ajustée à l'âge x

q_x(U.P.E.A.) : probabilité de décès ajustée par l'U.P.E.A.

% : écart relatif (en %) entre q_x et q_x^*

$$\% = \frac{q_x - q_x^*}{q_x} \cdot 100$$

% U.P.E.A. : écart relatif (en %) entre q_x et q_x(U.P.E.A.)

$$\%\ \text{U.P.E.A.} = \frac{q_x - q_x\,(\text{U.P.E.A.})}{q_x} \cdot 100$$

x : âge

Les graphiques XV à XVII illustrent le tableau II. Ils représentent les quantités q_x, q_x^*, q_x(U.P.E.A.) respectivement pour les intervalles :

$$25 \leqslant x \leqslant 45\ (\text{XV}); \quad 45 \leqslant x \leqslant 65\ (\text{XVI});$$

$$65 \leqslant x \leqslant 80\ (\text{XVII})$$

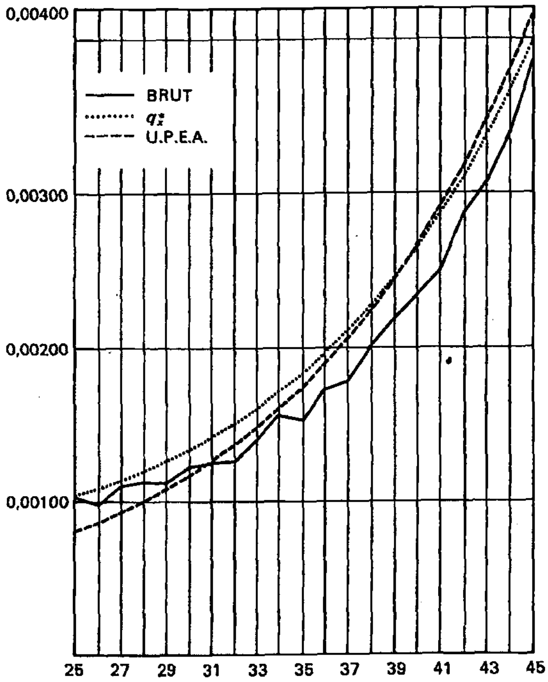
*

(1) On entend par optimum, le triplet de valeurs $[s_n, g_n, c_n]$ tel que :
$\text{MAX}[|s_n - s_{n-1}|, |g_n - g_{n-1}|, |c_n - c_{n-1}|] < 10^{-9}$.

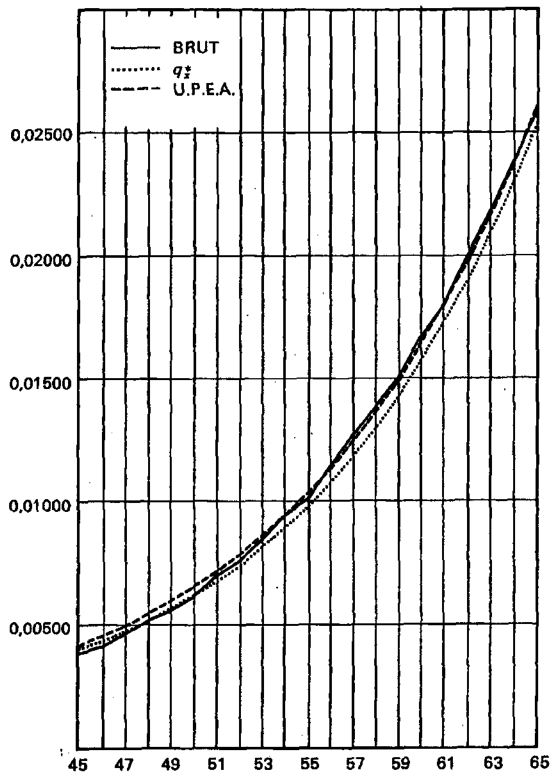
Tableau II.

x	q_x	q_x^*	q_x(U.P.E.A.)	%	% U.P.E.A.	x
25	0.001030	0.001037	0.000806	−0.65	21.78	25
26	0.000980	0.001086	0.000865	−10.79	11.76	26
27	0.001100	0.001140	0.000930	−3.62	15.48	27
28	0.001130	0.001200	0.001001	−6.15	11.41	28
29	0.001120	0.001265	0.001079	−12.99	3.62	29
30	0.001230	0.001338	0.001166	−8.81	5.23	30
31	0.001250	0.001419	0.001260	−13.51	−0.84	31
32	0.001260	0.001508	0.001365	−19.67	−8.31	32
33	0.001400	0.001606	0.001479	−14.72	−5.65	33
34	0.001560	0.001715	0.001605	−9.91	−2.88	34
35	0.001530	0.001834	0.001743	−19.90	−13.94	35
36	0.001730	0.001967	0.001895	−13.69	−9.56	36
37	0.001780	0.002113	0.002062	−18.71	−15.87	37
38	0.002010	0.002275	0.002246	−13.16	−11.74	38
39	0.002190	0.002453	0.002448	−12.00	−11.77	39
40	0.002340	0.002650	0.002670	−13.24	−14.09	40
41	0.002500	0.002868	0.002913	−14.70	−16.53	41
42	0.002880	0.003108	0.003181	−7.91	−10.46	42
43	0.003070	0.003373	0.003476	−9.88	−13.21	43
44	0.003390	0.003666	0.003799	−8.15	−12.07	44
45	0.003850	0.003990	0.004155	−3.64	−7.91	45
46	0.004160	0.004348	0.004545	−4.51	−9.26	46
47	0.004660	0.004742	0.004974	−1.77	−6.74	47
48	0.005190	0.005178	0.005446	0.22	−4.93	48
49	0.005570	0.005660	0.005964	−1.61	−7.07	49
50	0.006160	0.006191	0.006533	−0.51	−6.06	50
51	0.006980	0.006778	0.007158	2.89	−2.56	51
52	0.007600	0.007426	0.007845	2.29	−3.23	52
53	0.008440	0.008141	0.008600	3.54	−1.89	53
54	0.009430	0.008930	0.009428	5.30	0.02	54
55	0.010110	0.009802	0.010339	3.05	−2.26	55
56	0.011440	0.010763	0.011338	5.91	0.89	56
57	0.012700	0.011825	0.012436	6.89	2.08	57
58	0.013860	0.012996	0.013641	6.24	1.58	58
59	0.015080	0.014288	0.014964	5.25	0.77	59
60	0.016690	0.015713	0.016416	5.85	1.64	60
61	0.017960	0.017285	0.018010	3.76	−0.28	61
62	0.020060	0.019019	0.019759	5.19	1.50	62
63	0.021820	0.020931	0.021678	4.07	0.65	63
64	0.023860	0.023039	0.023783	3.44	0.32	64
65	0.025840	0.025362	0.026092	1.85	−0.97	65
66	0.027920	0.027922	0.028623	−0.01	−2.52	66
67	0.030530	0.030742	0.031399	−0.69	−2.85	67
68	0.033300	0.033848	0.034440	−1.64	−3.42	68
69	0.036710	0.037267	0.037773	−1.52	−2.89	69
70	0.040010	0.041030	0.041422	−2.55	−3.53	70
71	0.044250	0.045171	0.045418	−2.08	−2.64	71
72	0.048570	0.049724	0.049792	−2.38	−2.52	72
73	0.053350	0.054728	0.054576	−2.58	−2.30	73
74	0.058720	0.060226	0.059807	−2.56	−1.85	74
75	0.065690	0.066262	0.065524	−0.87	0.25	75
76	0.073360	0.072885	0.071768	0.65	2.17	76
77	0.081380	0.080147	0.078584	1.52	3.44	77
78	0.088270	0.088103	0.086019	0.19	2.55	78
79	0.097600	0.096812	0.094122	0.81	3.56	79
80	0.106630	0.106336	0.102946	0.28	3.45	80

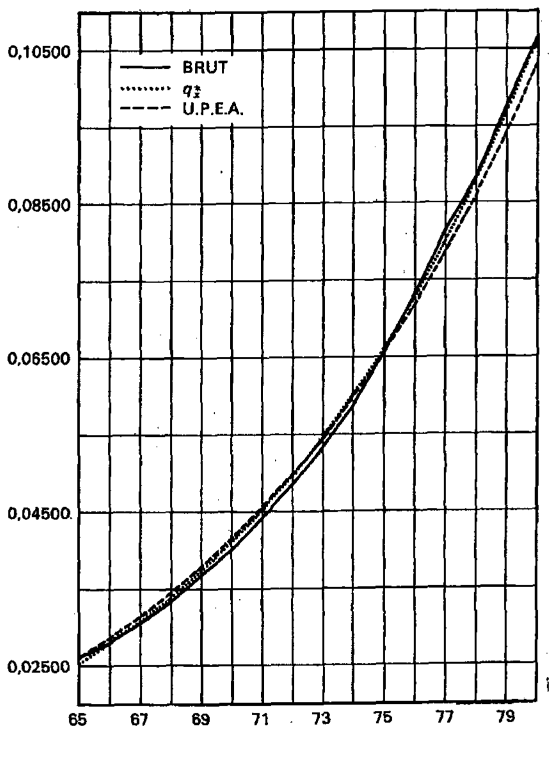
GRAPHIQUE XV.



GRAPHIQUE XVI.



GRAPHIQUE XVII.



c. *Ajustement des parties de la table:*

$$15 \leqslant x \leqslant 85 \text{ et } 10 \leqslant x \leqslant 90.$$

i — Valeurs des paramètres de Makeham.

La méthode itérative de Newton-Raphson conduit aux valeurs optimales suivantes:

$$15 \leqslant x \leqslant 85$$

$$s^* = 0{,}999\ 282\ 713\ 9$$

$$g^* = 0{,}999\ 673\ 001\ 3$$

$$c^* = 1{,}106\ 306\ 751\ 8$$

$$10 \leqslant x \leqslant 90$$

$$s^* = 0{,}999\ 841\ 860\ 8$$

$$g^* = 0{,}999\ 526\ 953\ 8$$

$$c^* = 1{,}101\ 804\ 561\ 3$$

ii — Résumé numérique de l'ajustement de ces parties et de l'ajustement U.P.E.A., sur les mêmes intervalles.

Tableau III.

	$15 \leqslant x \leqslant 85$	U.P.E.A. $15 \leqslant x \leqslant 85$	$10 \leqslant x \leqslant 90$	U.P.E.A. $10 \leqslant x \leqslant 90$
$\Sigma (l_x \text{brut} - l_x)^2$	$0{,}130 \quad 10^9$	$0{,}333 \quad 10^9$	$0{,}487 \quad 10^9$	$0{,}369 \quad 10^9$
$\Sigma \lvert l_x \text{brut} - l_x \rvert$	$0{,}919 \quad 10^5$	$0{,}145 \quad 10^6$	$0{,}183 \quad 10^6$	$0{,}162 \quad 10^6$
$\Sigma (q_x \text{brut} - q_x)^2$	0,000 025 4	0,000 403 1	0,000 166	0,000 935
$\Sigma \lvert q_x \text{brut} - q_x \rvert$	0,032 7	0,074 7	0,060 4	0,124 2

Le tableau III donne pour les ajustements des parties de table $15 \leqslant x \leqslant 85$ et $10 \leqslant x \leqslant 90$, et pour l'ajustement U.P.E.A. sur les mêmes intervalles, la valeur des quantités :

$$\Sigma(l_x\text{brut} - l_x)^2 \,; \quad \Sigma\left|l_x\text{brut} - l_x\right| \,;$$

$$\Sigma(q_x\text{brut} - q_x)^2 \,; \quad \Sigma\left|q_x\text{brut} - q_x\right|.$$

*

d. *Analyse actuarielle.*

L'ajustement des tables sur des intervalles partiels, ceux précisément où la mortalité réelle est approximativement du type makehamien, donne des résultats qui sont supérieurs, sur le plan actuariel, à l'ajustement induit.

Eliminons, pour les raisons invoquées précédemment, la zone terminale. Pour les autres âges, on s'aperçoit que les conditions de sécurité et de régularité sont suffisamment remplies pour les ajustements : $25 \leqslant x \leqslant 80$ et $15 \leqslant x \leqslant 85$ et que, de plus, la règle de compensation favorable observée déjà pour l'ajustement induit l'est encore davantage pour les deux ajustements précités, surtout pour le second.

C'est pourquoi nous accorderions une très légère préférence à celui-ci, quoique les critères statistiques y soient un peu moins bien remplis que dans l'ajustement : $25 \leqslant x \leqslant 80$.

En revanche, sans doute parce que les bornes sont mal choisies (surtout la borne supérieure), l'ajustement : $10 \leqslant x \leqslant 90$ peut être considéré comme défavorable, tant par rapport à l'ajustement U.P.E.A. que par rapport aux ajustements : $25 \leqslant x \leqslant 80$ et $15 \leqslant x \leqslant 85$, et même, partiellement, à l'ajustement induit.

* * *

4. — Conclusions.

Il n'est pas question de qualifier, sur le plan actuariel, de bon ou de mauvais, tel ou tel ajustement, d'autant que les différences entre les valeurs actuarielles obtenues à l'aide des cinq ajustements étudiés restent assez faibles (1).

Encore moins est-il question de substituer l'un de ces ajustements à celui qui est utilisé dans les opérations en cours.

Mais la présente étude pourrait se révéler utile pour l'ajustement des tables de mortalité brutes H, F, H + F (1968-1972), issues du recensement de 1970.

*

(1) A titre d'illustration, on trouvera en annexe, un tableau donnant la valeur de ${}_{n}E_{x}$ pour $10 \leqslant n \leqslant 40$, $\Delta n = 10$, et pour les cinq ajustements étudiés.

Les divers ajustements étudiés démontrent, comme on pouvait s'y attendre, qu'aucun ajustement makehamien ne peut vérifier à la fois et complètement les conditions de sécurité et de régularité et la règle de compensation favorable.

En effet, la loi de mortalité réelle ne s'accorde qu'imparfaitement (voire très mal pour certains âges) à la loi de Makeham, ce qui entraîne nécessairement des défauts plus ou moins sensibles dans la régularité.

D'autre part, l'optimisation de l'ajustement vise à réduire au maximum les écarts entre les q_x ajustés et bruts indépendamment de leur sens, ce qui va généralement à l'encontre de la condition de sécurité.

Reste la règle de compensation favorable qui devrait être respectée dans certaines limites.

Cela d'autant plus que, pour les tables applicables aux opérations de genre décès, elle doit jouer dans le même sens que pour les tables réservées aux opérations de genre vie (rentes viagères immédiates exceptées). Le capital sous risque possède en effet la plupart du temps sa valeur maximum au début de contrat (où il est fortement positif pour les opérations de genre décès, faiblement positif ou négatif pour les opérations de genre vie) et sa valeur minimum en fin de contrat (où il est faiblement positif ou négatif dans les opérations de genre décès, fortement négatif dans les opérations de genre vie).

C'est dire que pour les opérations de genre décès, les q_x devraient être approchés par excès en début de contrat sans devoir l'être, en tout cas dans la même mesure, en fin de contrat. Au contraire pour les opérations de genre vie (rentes viagères immédiates exceptées) les q_x devraient être approchés par défaut en fin de contrat, sans devoir l'être dans la même mesure en début de contrat.

La règle de compensation favorable joue donc dans le même sens pour les deux groupes d'opérations et se traduit en donnant aux tables ajustées respectives un étalement un peu plus important que celui de la table non ajustée, entendant par là que la fonction

$$\frac{\mu'_x}{\mu_x}$$

est un peu plus petite, au moins dans la première moitié de la table, dans les tables ajustées que dans les tables non ajustées correspondantes.

Le tableau IV montre à cet égard les différentes valeurs de cette fonction pour les ajustements suivants :

U.P.E.A. $\quad q_x(25 \leqslant x \leqslant 80) \quad q_x(15 \leqslant x \leqslant 85)$.

Tableau IV.

x	U.P.E.A.	q_x $25 \leqslant x \leqslant 80$	q_x $15 \leqslant x \leqslant 85$
1	0.020635	0.006660	0.004897
2	0.022203	0.007306	0.005390
3	0.023851	0.008009	0.005929
4	0.025578	0.008774	0.006519
5	0.027381	0.009604	0.007163
6	0.029258	0.010503	0.007865
7	0.031204	0.011476	0.008630
8	0.033214	0.012527	0.009461
9	0.035281	0.013658	0.010364
10	0.037399	0.014875	0.011342
11	0.039558	0.016179	0.012399
12	0.041752	0.017574	0.013541
13	0.043970	0.019061	0.014770
14	0.046202	0.020643	0.016090
15	0.048440	0.022320	0.017504
16	0.050673	0.024092	0.019015
17	0.052891	0.025956	0.020623
18	0.055084	0.027912	0.022331
19	0.057243	0.029955	0.024138
20	0.059360	0.032081	0.026043

x	U.P.E.A.	q_x $25 \leqslant x \leqslant 80$	q_x $15 \leqslant x \leqslant 85$
21	0.061426	0.034283	0.028043
22	0.063435	0.036555	0.030135
23	0.065381	0.038887	0.032313
24	0.067257	0.041271	0.034573
25	0.069060	0.043696	0.036906
26	0.070786	0.046150	0.039303
27	0.072433	0.048623	0.041754
28	0.073999	0.051101	0.044249
29	0.075485	0.053572	0.046775
30	0.076888	0.056025	0.049320
31	0.078211	0.058448	0.051871
32	0.079455	0.060829	0.054415
33	0.080622	0.063157	0.056939
34	0.081713	0.065425	0.059432
35	0.082732	0.067623	0.061880
36	0.083681	0.069744	0.064273
37	0.084563	0.071781	0.066601
38	0.085382	0.073732	0.068856
39	0.086141	0.075591	0.071029
40	0.086844	0.077356	0.073116
41	0.087493	0.079027	0.075110
42	0.088092	0.080603	0.077008
43	0.088644	0.082085	0.078808
44	0.089152	0.083475	0.080510
45	0.089619	0.084773	0.082112
46	0.090049	0.085984	0.083617
47	0.090443	0.087111	0.085025
48	0.090805	0.088156	0.086339
49	0.091136	0.089125	0.087562
50	0.091440	0.090020	0.088698
51	0.091718	0.090845	0.089751
52	0.091973	0.091606	0.090724
53	0.092206	0.092306	0.091622
54	0.092418	0.092949	0.092449
55	0.092613	0.093538	0.093209
56	0.092790	0.094078	0.093907
57	0.092952	0.094573	0.094548
58	0.093100	0.095025	0.095134
59	0.093235	0.095438	0.095670
60	0.093359	0.095815	0.096160
61	0.093471	0.096158	0.096607
62	0.093573	0.096472	0.097015
63	0.093667	0.096757	0.097387
64	0.093752	0.097017	0.097725
65	0.093829	0.097253	0.098033
66	0.093900	0.097468	0.098313
67	0.093964	0.097664	0.098568
68	0.094023	0.097841	0.098799
69	0.094076	0.098002	0.099009
70	0.094125	0.098149	0.099199
71	0.094169	0.098282	0.099372
72	0.094210	0.098403	0.099529
73	0.094246	0.098512	0.099671
74	0.094280	0.098611	0.099799
75	0.094310	0.098701	0.099916
76	0.094338	0.098783	0.100022
77	0.094363	0.098857	0.100118
78	0.094386	0.098924	0.100204
79	0.094407	0.098985	0.100283
80	0.094426	0.099040	0.100354

x	U.P.E.A.	q_x $25 \leqslant x \leqslant 80$	q_x $15 \leqslant x \leqslant 85$
81	0.094443	0.099090	0.100418
82	0.094459	0.099136	0.100476
83	0.094473	0.099177	0.100529
84	0.094487	0.099214	0.100577
85	0.094498	0.099248	0.100620
86	0.094509	0.099278	0.100659
87	0.094519	0.099306	0.100694
88	0.094528	0.099331	0.100726
89	0.094536	0.099353	0.100755
90	0.094543	0.099374	0.100781
91	0.094550	0.099392	0.100805
92	0.094556	0.099409	0.100826
93	0.094562	0.099425	0.100845
94	0.094567	0.099438	0.100863
95	0.094572	0.099451	0.100879
96	0.094576	0.099462	0.100893
97	0.094580	0.099472	0.100906
98	0.094583	0.099482	0.100917
99	0.094586	0.099490	0.100928
100	0.094589	0.099498	0.100937

La règle de compensation favorable dans l'ajustement est, sinon nécessaire, du moins utile; elle n'est certes pas suffisante.

En fait, l'ajustement de Makeham n'est, parmi d'autres, qu'un ajustement analytique dont le but essentiel (1) est d'éliminer les irrégularités accidentelles de la table non ajustée qui, sans cela, pourrait être utilisée telle quelle; il doit serrer la table non ajustée d'aussi près que possible et, au delà de cette possibilité, accentuer plutôt ses qualités que ses défauts. D'autre part, un défaut de concordance entre la mortalité de la population dont est issue la table brute et celle de la population des assurés peut être éliminé à partir des q_x bruts judicieusement corrigés, par une opération qui ne doit pas nécessairement revêtir un caractère analytique, celui-ci étant obtenu, si besoin en est, par l'ajustement définitif.

*

On peut conjecturer que les derniers résultats de la mortalité, observés dans la population générale, montreront que la décroissance de cette mortalité a marqué un ralentissement, voire un temps d'arrêt et même un certain recul pour quelques zones d'âges.

On devrait aussi s'attendre à un étalement de la mortalité par rapport à celle des tables actuellement utilisées.

La loi de Makeham choisie éventuellement pour l'ajustement définitif devrait donc aller dans le sens de cet étalement plutôt qu'en sens inverse.

(1) Accessoirement, il facilite certaines opérations tarifaires.

* * *

5. — Bibliographie.

[1] BALLEGEER, Y., *Ajustements makehamiens, optimaux au sens des moindres carrés, d'une table de mortalité sur un intervalle d'âge déterminé*, Bulletin de Statistique, mai 1973 et Etudes Statistiques numéro 32, 1973.

[2] *Tarif de référence U.P.E.A.: Commutations, Primes uniques et Annuités*, H + F (1959-63)M_k 4%, 1 tête, septembre 1968.

[3] FRERE R., *Ajustement de la fonction de Makeham aux tables de mortalité brute, B.A.R.A.B.*, 1968.

Annexe

x	q_x $25 \leqslant x \leqslant 80$	x	q_x $15 \leqslant x \leqslant 85$	x	q_x $10 \leqslant x \leqslant 90$	x	U.P.E.A.	x	l_x^*
				$_{10}E_x$					
5	0.671030	5	0.670099	5	0.673649	5	0.673185	5	0.666937
10	0.670579	10	0.669683	10	0.673121	10	0.672605	10	0.666576
15	0.669838	15	0.668993	15	0.672265	15	0.671674	15	0.665971
20	0.668621	20	0.667851	20	0.670876	20	0.670183	20	0.664956
25	0.666623	25	0.665963	25	0.668627	25	0.667798	25	0.663256
30	0.663350	30	0.662845	30	0.664992	30	0.663987	30	0.660413
35	0.657999	35	0.657711	35	0.659131	35	0.657916	35	0.655670
40	0.649289	40	0.649291	40	0.649724	40	0.648288	40	0.647788
45	0.635210	45	0.635573	45	0.634735	45	0.633130	45	0.634773
50	0.612710	50	0.613475	50	0.611129	50	0.609539	50	0.613518
55	0.577413	55	0.578532	55	0.574654	55	0.573500	55	0.579437
60	0.523712	60	0.524951	60	0.520006	60	0.520061	60	0.526447
65	0.446013	65	0.446860	65	0.442121	65	0.444506	65	0.448187
70	0.342455	70	0.342179	70	0.339718	70	0.345507	70	0.342114
75	0.221732	75	0.219863	75	0.221474	75	0.230591	75	0.217445
80	0.108457	80	0.105633	80	0.110570	80	0.120501	80	0.101641
85	0.033444	85	0.031349	85	0.035790	85	0.042524	85	0.028368
90	0.004827	90	0.004187	90	0.005732	90	0.007991	90	0.003333
				$_{20}E_x$					
5	0.449482	5	0.448292	5	0.452871	5	0.452161	5	0.444161
10	0.448363	10	0.447248	10	0.451581	10	0.450768	10	0.443244
15	0.446530	15	0.445524	15	0.449494	15	0.448542	15	0.441709
20	0.443530	20	0.442682	20	0.446127	20	0.444993	20	0.439145
25	0.438637	25	0.438011	25	0.440713	25	0.439355	25	0.434877
30	0.430706	30	0.430379	30	0.432061	30	0.430455	30	0.427808
35	0.417968	35	0.418024	35	0.418373	35	0.416546	35	0.416202
40	0.397826	40	0.398323	40	0.397065	40	0.395157	40	0.397429
45	0.366779	45	0.367699	45	0.364753	45	0.363100	45	0.367811
50	0.320884	50	0.322044	50	0.317791	50	0.316997	50	0.322984
55	0.257533	55	0.258523	55	0.254067	55	0.254924	55	0.259696
60	0.179348	60	0.179627	60	0.176656	60	0.179685	60	0.180105
65	0.098895	65	0.098248	65	0.097919	65	0.102499	65	0.097456
70	0.037142	70	0.036145	70	0.037563	70	0.041634	70	0.034773
75	0.007416	75	0.006892	75	0.007927	75	0.009806	75	0.006169
80	0.000524	80	0.000442	80	0.000634	80	0.000963	80	0.000339
				$_{30}E_x$					
5	0.299635	5	0.298545	5	0.302802	5	0.301952	5	0.294592
10	0.297422	10	0.296456	10	0.300298	10	0.299304	10	0.292724
15	0.293816	15	0.293026	15	0.296276	15	0.295103	15	0.289615
20	0.287979	20	0.287429	20	0.289860	20	0.288484	20	0.284473
25	0.278627	25	0.278388	25	0.279736	25	0.278169	25	0.276048
30	0.263898	30	0.264027	30	0.264045	30	0.262379	30	0.262468
35	0.241340	35	0.241840	35	0.240420	35	0.238889	35	0.241163
40	0.208346	40	0.209100	40	0.206476	40	0.205506	40	0.209225
45	0.163588	45	0.164310	45	0.161265	45	0.161400	45	0.164848
50	0.109888	50	0.110197	50	0.107959	50	0.109525	50	0.110497
55	0.057103	55	0.056839	55	0.056269	55	0.058783	55	0.056470
60	0.019452	60	0.018975	60	0.019533	60	0.021652	60	0.018306
65	0.003307	65	0.003080	65	0.003505	65	0.004359	65	0.002765
70	0.000179	70	0.000151	70	0.000215	70	0.000333	70	0.000116

x	q_x $25 \leqslant x \leqslant 80$	x	q_x $15 \leqslant x \leqslant 85$	x	q_x $10 \leqslant x \leqslant 90$	x	U.P.E.A.	x	l_x^*
				${}_{40}E_x$					
5	0.197159	5	0.196357	5	0.199586	5	0.198659	5	0.193155
10	0.193113	10	0.192486	10	0.195111	10	0.194035	10	0.189623
15	0.186635	15	0.186240	15	0.188057	15	0.186839	15	0.183840
20	0.176447	20	0.176331	20	0.177142	20	0.175842	20	0.174525
25	0.160883	25	0.161056	25	0.160751	25	0.159530	25	0.159953
30	0.138206	30	0.138601	30	0.137305	30	0.136453	30	0.138175
35	0.107641	35	0.108069	35	0.106295	35	0.106188	35	0.108086
40	0.071349	40	0.071550	40	0.070144	40	0.071004	40	0.071579
45	0.036273	45	0.036126	45	0.035716	45	0.037217	45	0.035845
50	0.011918	50	0.011640	50	0.011937	50	0.013198	50	0.011231
55	0.001910	55	0.001782	55	0.002014	55	0.002500	55	0.001602
60	0.000094	60	0.000079	60	0.000112	60	0.000173	60	0.000061

QUELQUES ÉTUDES PUBLIÉES ANTÉRIEUREMENT

— Tableau « Entrées-Sorties » de la Belgique pour 1959 (3 tomes), description générale de la méthode de calcul, demande finale au prix d'acquisition et investissements par branche d'activité, les coefficients techniques et la matrice inverse.

ETUDES STATISTIQUES(1)

Nº 1 — Analyse de la demande d'après les enquêtes sur les budgets des ménages effectuées en Belgique en 1948-1949 et 1956-1957.

Nº 2 — Croissance du revenu national de 1948 à 1959 et prévisions sur cette base pour les années à venir.
— Les dépenses des ménages en combustibles solides, électricité et gaz de ville de 1948 à 1959.
— Les élasticités de la demande des ménages en charbon, gaz et électricité aux prix et aux revenus d'après les séries chronologiques 1948-1959 — Prévisions relatives à la consommation des ménages en 1965.

Nº 3 — Sur quelques aspects de la précision d'estimations basées sur les enquêtes de budgets ménagers.
— Répartition par province et par région linguistique du produit intérieur global et de la valeur ajoutée relative aux diverses branches d'activité.

Nº 4 — Les comptes nationaux de la Belgique 1953-1962.

Nº 5 — Enquête sur les budgets des ménages 1961 — Description de la méthode — Revenu, consommation et épargne de dix groupes sociaux.

Nº 6 — La valeur ajoutée par branche d'activité et par travailleur dans les différentes provinces et régions linguistiques de 1955 à 1959.
— Evolution de la concentration industrielle, variation du rendement, des rémunérations, de la valeur ajoutée et des investissements avec la dimension des établissements industriels.

Nº 7 — Enquête sur les budgets des ménages 1961 — Structure du budget selon les charges familiales et selon les régions linguistiques — Etude du caractère représentatif de l'enquête sur les budgets des ménages.

Nº 8 — Les comptes nationaux de la Belgique 1953-1963 — Principales caractéristiques de l'évolution.

Nº 9 — Enquête sur les budgets des ménages 1961 — Structure du budget selon la classe d'importance des communes et selon la branche d'activité où le chef de ménage est occupé — Structure du budget selon l'épargne positive ou négative des ménages.

Nº 10 — La révision 1964 de l'indice de la production industrielle.
— Indice de la production de biens intermédiaires, de biens de consommation et de biens d'investissement.
— Décomposition des séries chronologiques en leurs composantes suivant diverses méthodes — Application à quelques séries belges.

Nº 11 — Les comptes nationaux de la Belgique 1953-1964 — Le développement économique et social.

Nº 12 — Croissance économique des provinces et régions linguistiques 1955-1963.

Nº 13 — Les comptes nationaux de la Belgique 1953-1965.

Nº 14 — Situation actuelle de la statistique régionale.
— Orientation à l'exportation des différentes provinces et régions linguistiques.
— Répartition régionale du revenu national en 1961.
— Croissance économique des provinces et des régions linguistiques de 1962 à 1964.

Nº 15 — Emploi et rémunération du travail par branche d'activité industrielle dans les provinces et régions linguistiques de 1955 à 1964.

Nº 16 — Les comptes nationaux de la Belgique 1953-1966.

Nº 17 — Typologie des communes belges d'après le degré d'urbanisation au 31 décembre 1961.
— Comparaison des enquêtes de 1961 et de 1963 sur les budgets des ménages d'ouvriers et d'employés.

Nº 18 — Répartition de la valeur ajoutée des différentes branches d'activité et du produit intérieur global par province et par région linguistique — Années 1965 et 1966.
— Les indices régionaux de la production industrielle (base 1964 = 100).
— La réforme de l'indice des prix de détail.

Nº 19 — Les comptes nationaux de la Belgique 1963-1967.

Nº 20 — Les comptes nationaux de la Belgique 1965-1968.

Nº 21 — Les comptes nationaux de la Belgique 1953-1969.

Nº 22 — Tableau « Entrées-Sorties » de la Belgique pour 1965.

Nº 23 — Croissance économique des provinces et régions linguistiques de 1965 à 1968.
— Orientation à l'exportation des différentes provinces et régions linguistiques. Années 1966 à 1968.

(1) Les numéros de 1 à 14 ont été édités sous le titre « Etudes Statistiques et Econométriques ».

N° 24 — Vers un développement des comptes nationaux.

N° 25 — Les comptes nationaux de la Belgique 1966-1970.

N° 26 — Caractéristiques complémentaires de l'évolution économique selon les comptes nationaux 1963-1970.
— Les investissements des producteurs-distributeurs d'électricité : tests des hypothèses de l'accélération et de la capacité.

N° 27 — La division des communes belges en secteurs statistiques.
— Les investissements industriels des régions linguistiques de 1955 à 1969.
— Tableau entrées-sorties 1965. Données complémentaires sur l'emploi par branche d'activité.

N° 28 — Les comptes nationaux de la Belgique 1963-1971.

N° 29 — Les loyers des logements en 1970 et 1971.

N° 30 — Valeur ajoutée par travailleur dans l'industrie de 1953 à 1969.
— Les investissements industriels des provinces de 1955 à 1969.

N° 31 — Etude de quelques applications des équations de récurrence.
— Caractéristiques complémentaires de l'évolution économique selon les comptes nationaux 1963-1971.

N° 32 — Ajustements makehamiens, optimaux au sens des moindres carrés, d'une table de mortalité sur un intervalle d'âge déterminé.
— Croissance économique des provinces et régions linguistiques de 1966 à 1971. Valeur ajoutée et produit global par branche d'activité et région géographique.

N° 33 — Les comptes nationaux de la Belgique 1965-1972.

N° 34 — Comptes nationaux de la Belgique. Estimations en prix de 1970 pour la période 1953-1964.
— Caractéristiques complémentaires de l'évolution économique selon les comptes nationaux 1965-1972.